SOUTIEN RENFORCÉ : SÉANCE 3

BARBARA TUMPACH

1. Notions de Topologie

Definition 1. *Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'une famille $\mathcal{T}$ de parties de E ($\mathcal{T} \subset \wp(E)$), appelée les ouverts de E, vérifiant les trois conditions suivantes :*
i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $E \in \mathcal{T}$
ii) une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$
iii) une union quelconque (finie, dénombrable ou non dénombrable) d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.
Un espace E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est appelé un espace topologique.

Definition 2. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un ensemble F de E est dit fermé si c'est le complémentaire d'un ouvert, autrement dit si $F^c \in \mathcal{T}$.*

Remarque 1. *L'ensemble vide et l'ensemble E sont à la fois ouverts et fermés.*

Definition 3. *On définit sur la droite réelle $\mathbb{R}$ une topologie , appelée topologie usuelle, de la maniére suivante : un ensemble $O \subset E$ sera dit ouvert ssi pour tout point $x \in O$ il existe un intervalle de la forme $]x-\epsilon, x+\epsilon[$, avec $\epsilon > 0$ entièrement contenu dans O.*

Exercice 1. *Quels sont les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont ouverts pour la topologie usuelle ? Quels sont les intervalles fermés ?*

Exercice 2. *Déterminer :*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}\ ; b + \frac{1}{n}[$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}\ ; b - \frac{1}{n}]$$

Definition 4. *On appelle voisinage d'un point x_0 de E un sous-ensemble de E contenant un ouvert non vide de E contenant x_0.*

Exercice 3. *Donner une famille de voisinages d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ dont l'intersection se réduit a x_0.*

Definition 5. *Une application f d'un espace topologique $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{X}})$ dans un autre $(Y, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}})$ est dite continue en $x_0 \in E$ si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0.*

Exercice 4. *Montrer que l'on retrouve la definition que vous connaissez lorsque X et Y sont égaux à $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.*

Definition 6. *On dit qu'une application $f \ : (X, \mathcal{T}_\mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{T}_\mathcal{Y})$ est continue sur X ssi elle est continue au voisinage de tout point de X.*

Exercice 5. *Montrer qu'une application $f \ : (X, \mathcal{T}_\mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{T}_\mathcal{Y})$ est continue ssi l'image réciproque par f d'un ouvert de Y est un ouvert de X.*