SOUTIEN RENFORCÉ : SÉANCE 1

BARBARA TUMPACH

Les mathématiques se construisent comme un batiment, les fondations sont les axiomes et chaque brique est un lien de causalité.

1. De la théorie des ensembles à la construction de $\mathbb{N}$

Nous allons partir de la simple hypothèse qu'il existe un ensemble et à l'aide de quelques axiomes nous allons construire l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

1.1. **L'axiome d'extensionnalité.** Deux ensembles A et B sont égaux ssi tout élément de A est un élément de B et vice versa.

$$(\forall A), (\forall B), [(A = B) \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$$

1.2. **L'axiome de sélection.** Un ensemble A et une propriété $\wp(x)$ dépendant d'une variable x étant donnés, il existe un ensemble B dont les éléments sont, parmi les éléments de A, ceux qui vérifient la propriété $\wp$.

$$(\forall A), (\exists B), (\forall x), [(x \in A \wedge \wp(x)) \Leftrightarrow (x \in B)]$$

Théorème 1. *Il n'existe pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles.*

Dem : Par l'absurde.

Théorème 2. *Il existe un ensemble unique noté $\emptyset$ n'ayant aucun élément, appelé ensemble vide. Il est contenu dans n'importe quel ensemble.*

Dem : On utilise l'axiome de sélection.

1.3. **L'axiome de réunion.** Étant donné une collection $\mathcal{A}$ d'ensembles, il existe un ensemble (la réunion des ensembles de la collection) dont les éléments sont les objets qui appartiennent à l'un des ensembles de la collection.

$$(\forall \mathcal{A}), (\exists B), (\forall x)[(x \in B) \Leftrightarrow \exists c (c \in \mathcal{A} \wedge (x \in c))]$$

Théorème 3. *Soit $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles non vide. Il existe un unique ensemble B (l'intersection des ensembles de la collection) dont les éléments sont les objets qui appartiennent à tous les ensembles de la collection $\mathcal{A}$.*

1.4. **L'axiome de la paire.** Étant donnés deux ensembles A et B, il existe un ensemble C qui a pour éléments A et B et eux seuls.

$$(\forall A),(\forall B),(\exists C),(\forall x),[x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B]$$

Exercice 1. *Montrer qu'il existe un ensemble dont le seul élément est l'ensemble vide.*

1.5. **L'axiome de l'ensemble des parties.** Étant donné un ensemble A, il existe un ensemble B dont les éléments sont les sous-ensembles de A. On l'appelle $\wp(A)$ ou ensemble des parties de A.

Exercice 2. *Expliciter l'ensemble* $\wp(\{a,b\})$*.*

Exercice 3. *Calculer le cardinal de* $\wp(A)$ *lorsque* A *posséde* n *éléments.*

Exercice 4. *Étant donné un ensemble* x *et en utilisant l'axiome de la paire et de la réunion, montrer que l'on peut définir un ensemble ayant pour éléments tous les éléments de* x *et l'ensemble* x *lui-même. On l'appellera le successeur de* x *et on le notera* $x^+ = x \cup \{x\}$*.*

1.6. **L'axiome de l'infini ou des entiers naturels.** Il existe un ensemble contenant $\emptyset$ et contenant le successeur de chacun de ces éléments.

$$\exists A, [\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

Théorème 4. *Il existe un plus petit ensemble* $\mathbb{N}$ *possédant les propriétés suivantes :*

- $\emptyset \in \mathbb{N}$
- $\forall x \in \mathbb{N}, x^+ \in \mathbb{N}$

Théorème 5. *Soit* $\wp(x)$ *un énoncé dépendant de la variable* x*, on suppose que :*

- $\wp(0)$ *est vrai*
- $\wp(x)$ *vrai* $\Rightarrow \wp(x^+)$ *vrai*

Alors $\wp(x)$ *est vrai* $\forall x \in \mathbb{N}$*.*

2. Construction de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Definition 1. *Une relation d'équivalence* $\sim$ *sur un ensemble* E *est une relation binaire (entre deux éléments de* E *) vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- *reflexivité :* $\forall x \in E, x \sim x$
- *symétrie :* $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- *transitivité :* $x \sim y$ *et* $y \sim z \rightarrow x \sim z$

Exercice 5. *Montrer que la relation binaire définie sur* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *par* $(p,q) \sim (m,n) \Leftrightarrow p+n = q+m$ *est une relation d'équivalence.*

Exercice 6. *Montrer que la relation binaire définie sur* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *par* $(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow pq' - p'q = 0$ *est une relation d'équivalence.*

Definition 2. *Une partition d'un ensemble* E *est la donnée d'une famille* $E_i, i \in I$ *de sous-ensembles de* E *telle que :*

- $\forall i \in I, E_i \neq \emptyset$
- $E_i \cap E_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$
- $\cup_{i \in I} E_i = E$

Exercice 7. *Montrer qu'une relation d'équivalence partitionne un ensemble en sous-ensembles appelés classes d'équivalence.*

Definition 3. *Soient* E *un ensemble et* $\sim$ *une relation d'équivalence sur* E*. On appelle ensemble quotient de* E *par* $\sim$ *l'ensemble formé des classes d'équivalences de* $\sim$.

Exercice 8. *Définir* $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *à l'aide des relations d'équivalence précédentes.*