Solutions de la séance d'exercices 3 : Théorème de Carathéodory, Calcul d'aire et de volume

1 Théorème de Carathéodory

Exercice 1 1. *a*) cf cours. *b*) clair. *c*) Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un suite quelconque d'ensembles m_*-mesurables. On pose $B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1$ et $B_j = \cup_{i=1}^{j-1} A_i$, pour $j \geq 2$. Soit Q un sous-ensemble de Ω. Montrons par récurrence que l'assertion (P_k) suivante est vérifiée pour tout $k \geq 1$:

$$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

- Pour $k = 1$, (P_1) dit simplement que $m_*(Q) = m_*(Q \cap A_1^c) + m_*(Q \cap A_1)$. Ceci est une conséquence de la m_*-mesurabilité de A_1 et de fait que

$$m_*(Q) \leq m_*(Q \cap A_1^c) + m_*(Q \cap A_1)$$

(on applique la σ-sous-additivité de m_* à $C_1 = Q \cap A_1^c$, $C_2 = Q \cap A_1$ et $C_i = \emptyset$ pour $i \geq 3$.)
- Montrons que $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$:
Puisque A_{k+1} est m_*-mesurable, on a :

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}).$$

Or $B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c = (B_{k+1} \cup A_{k+1})^c = B_{k+2}^c$. Ainsi :

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) = m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}). \tag{1}$$

Supposons que l'assertion (P_k) est vérifiée, alors

$$m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j),$$

et d'après (1)

$$\begin{aligned} m_*(Q) &= m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &= m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + \sum_{j=1}^{k+1} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j), \end{aligned}$$

qui n'est autre que (P_{k+1}).
- En conclusion, comme (P_1) est vrai et $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$, il en découle que l'assertion (P_k) est vraie pour tout $k \geq 1$.
d) Comme $B_{k+1} \subset A$, on a $Q \cap B_{k+1}^c \supset Q \cap A^c$ et, par monotonicité de m_*,

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) \geq m_*(Q \cap A^c).$$

La condition (P_k) entraîne alors que pour tout k :

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

Donc, en faisant tendre k vers $+\infty$:

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

$e)$ On a : $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(Q \cap B_j^c \cap A_j)$ et par σ-sous-additivité de m_* :

$$\begin{aligned} m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) &= m_*(Q \cap A^c) + m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(Q \cap B_j^c \cap A_j\right) \\ &\leq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &\leq m_*(Q). \end{aligned}$$

On en conclut que $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ est m_*-mesurable.

2. $a)$ cf cours. $b)$ Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments m_*-mesurables, deux à deux disjoints. Choisissons $Q = A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, alors $Q \cap A^c = \emptyset$ et $Q \cap B_j^c \cap A_j = A_j$ pour tout j. D'après la question 1.d),

$$m_*(Q) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

D'après la σ-sous-additivité de m_*, il vient :

$$m_*(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

3. Soit E un ensemble m_*-mesurable tel que $m_*(E) = 0$ et B un sous-ensemble de E. Comme $Q \cap B^c \subset Q$, on a par monotonicité de m_* l'inégalité $m_*(Q \cap B^c) \leq m_*(Q)$. Comme $Q \cap B \subset E$, on a aussi $m_*(Q \cap B) = 0$. On en déduit que

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap B^c) + m_*(Q \cap B).$$

Ainsi B est m_*-mesurable et m est complète.

Exercice 2 Il est clair que $m_*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, alors $m_*(A) \leq m_*(B)$, il faut donc uniquement démontrer que m_* est σ-sous-additive.

Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, fixons $\varepsilon > 0$ et notons $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Par définition de l'infimum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite $\{(a_i^n, b_i^n)\}$ telle que $A_n \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i^n, b_i^n)$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^n - a_i^n) \leq m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Comme $A \subset \bigcup\limits_{i,n}(a_i^n, b_i^n)$, on a

$$m_*(A) \leq \sum_{n,i}(b_i^n - a_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^n - a_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n) + \varepsilon.$$

On a donc la σ-sous-additivité $m_*(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_*(A_n)$ puisque ε est arbitraire.

Exercice 3 a) Il est clair que $m_*(\emptyset) = 0$ et que m_* est monotone.

Soit maintenant $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Si parmi les A_i il existe au moins un ensemble A_j non vide, on a

$$m_*(\bigcup_i A_i) = 1 = m_*(A_j) \leq \sum_i m_*(A_i).$$

Si tous les A_i sont vides, alors $\bigcup_i A_i = \emptyset$, et donc

$$m_*(\bigcup_i A_i) = 0 = \sum_i m_*(A_i).$$

Ainsi m_* est σ-sous-aditive et par consequent m_* est une mesure extérieure.

b) Les seuls ensembles mesurables sont $\emptyset$ et Ω, puisque si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors, pour tout $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ non vide et non inclus dans A, on a $A \cap Q \neq \emptyset$ et $A^c \cap Q \neq \emptyset$, et donc

$$m_*(A \cap Q) + m_*(A^c \cap Q) = 1 + 1 = 2 \neq m_*(Q) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. .$$

c) Il est clair que l'ensemble des parties m_*-mesurables de Ω, $\mathcal{M}_{m_*} = \{\emptyset, \Omega\}$, est une σ-algèbre.

Il est facile de voir aussi que

$$\mu = m_*|_{\mathcal{M}_{m_*}}, \; \mu(\emptyset) = 0, \;\; \mu(\Omega) = 1,$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{M}_{m_*})$.

2 Aire de $\mathcal{S}_{n-1}$ et Volume de $\mathcal{B}_n$

Exercice 4 1. Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$. On a :

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

L'application $\Phi \;: \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \geq 0\}$ définie par :

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x\geq 0\}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

car l'ensemble $\{(x,0), x \geq 0\}$ est négligeable. On en déduit que :

$$I^2 = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r\, drd\theta = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Ainsi $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

2. *Calcul de l'aire de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{S}_{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{A}_{n-1}$ son aire. D'après la question précédente, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \ldots dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

D'autre part, puisque l'aire de la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ vaut $r^{n-1}\mathcal{A}_{n-1}$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \dots dx_n = \mathcal{A}_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr.$$

En posant le changement de variable $x = r^2$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}\, dx,$$

d'où :

$$\mathcal{A}_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

3. *Calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{V}_n$ son volume. On a :

$$\mathcal{V}_n = \int_0^1 r^{n-1}\mathcal{A}_{n-1}\, dr = \mathcal{A}_{n-1}\left[\frac{r^n}{n}\right]_0^1 = \frac{\mathcal{A}_{n-1}}{n}.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{V}_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ce qui se réduit à :

$$\mathcal{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

en utilisant l'identité : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

4. *Application :* L'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathcal{A}_1 R = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} R = 2\pi R,$$

qui est bien le périmètre du cercle de rayon R dans le plan.
L'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\mathcal{A}_2 R^2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} R^2 = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R^2 = 4\pi R^2$$

qui est bien l'aire de la sphère S^2.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}$ vaut

$$\mathcal{V}_1 R = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} R = 2R,$$

qui est bien la longueur du segment $[-R, R]$.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathcal{V}_2 R^2 = \frac{2\pi}{2\Gamma(1)} R^2 = \pi R^2,$$

qui est bien l'aire du disque de rayon R.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\mathcal{V}_3 R^3 = \frac{\mathcal{A}_2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exercice 5 1. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_n &= \int_{\mathcal{B}_n} dx_1 \dots dx_n = \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1-x_1^2} dx_2 \dots dx_n \\ &= \mathcal{V}_{n-1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^{n-1} dx_1\end{aligned}$$

Posons $x_1 = \cos\theta$, pour $\theta \in [0,\pi]$. Alors $\sqrt{1-x_1^2} = |\sin\theta| = \sin\theta$ et $dx_1 = -\sin\theta\ d\theta$. On a donc

$$\mathcal{V}_n = -\mathcal{V}_{n-1} \int_{\pi}^{0} (\sin\theta)^n d\theta = \mathcal{V}_{n-1} \int_{0}^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta = I_n \cdot \mathcal{V}_{n-1}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-1}\ \sin\theta\ d\theta = \\ &= \left[-\cos\theta(\sin\theta)^{n-1}\right]_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-2}\ (\cos\theta)^2\ d\theta = \\ &= (n-1)\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-2}(1-(\sin\theta)^2)\ d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n).\end{aligned}$$

Donc $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

3. On a $I_0 = \pi,\ I_1 = 2$. Donc $I_2 = \frac{\pi}{2},\ I_3 = \frac{4}{3},\ I_4 = \frac{3\pi}{8},\ I_5 = \frac{16}{15},\ I_6 = \frac{15\pi}{48},\ I_7 = \frac{32}{35}$.

Comme $\mathcal{V}_1 = 2$ on trouve :

$$\mathcal{V}_2 = \pi,\ \mathcal{V}_3 = \frac{4\pi}{3},\ \mathcal{V}_4 = \frac{\pi^2}{2},\ \mathcal{V}_5 = \frac{8\pi^2}{15},\ \mathcal{V}_6 = \frac{\pi^3}{6},\ \mathcal{V}_7 = \frac{16}{105}\pi^3.$$

4. On a $\mathcal{V}_n = \int_0^1 \int_{\mathcal{S}_{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \frac{1}{n}\mathcal{A}_{n-1}$, d'où $\mathcal{A}_{n-1} = n\,\mathcal{V}_n$. Donc on a

$$\mathcal{A}_1 = 2\pi,\ \mathcal{A}_2 = 4\pi,\ \mathcal{A}_3 = 2\pi^2,\ \mathcal{A}_4 = \frac{8}{3}\pi^2,\ \mathcal{A}_5 = \pi^3,\ \mathcal{A}_6 = \frac{16}{15}\pi^3.$$