Séance d'exercices 3 : Théorème de Carathéodory, Calcul d'aire et de volume

le 7 novembre 2006

1 Théorème de Carathéodory

Definition 1 Une mesure extérieure sur un ensemble Ω est une application $m_* \ : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ telle que

(i) $m_*(\emptyset) = 0$;

(ii) (monotonicité) $A \subset B \Rightarrow m_*(A) \leq m_*(B)$;

(iii) (σ-sous-additivité) Pour toute suite d'ensembles $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(A_i).$$

Théorème 1 (de Carathéodory) Soit m_* une mesure extérieure sur Ω. Un ensemble $A \subset \Omega$ est dit m_*-mesurable si pour tout $Q \subset \Omega$ on a

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A) + m_*(Q \cap A^c).$$

Notons $\mathcal{M}_{m_*} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties m_*-mesurables. Alors

1. $\mathcal{M}_{m_*}$ est une σ-algèbre.
2. $m = m_*|_{\mathcal{M}_{m_*}}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{M}_{m_*})$.
3. L'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{M}_{m_*}, m)$ est complet, i.e. si $E \in \mathcal{M}_{m_*}$ et $m(E) = 0$, alors tout sous-ensemble $A \subset E$ appartient à $\mathcal{M}_{m_*}$.

Exercice 1 *Le but de cet exercice est de prouver le Théorème de Carathéodory.*

1. *a*) Rappeler la définition d'une σ-algèbre.
   b) Vérifier que $\emptyset$ et $\Omega \in \mathcal{M}_{m_*}$, et $A \in \mathcal{M}_{m_*} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}_{m_*}$.
   c) Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un suite quelconque d'ensembles m_*-mesurables. On pose $B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1$ et $B_j = \cup_{i=1}^{j-1} A_i$, pour $j \geq 2$. Soit Q un sous-ensemble de Ω. Montrer par récurrence que l'assertion (P_k) suivante est vérifiée pour tout $k \geq 1$:

   $$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

   d) Soit $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Déduire de la question précédente que

   $$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

   e) En remarquant que $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(Q \cap B_j^c \cap A_j)$, montrer :

   $$m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) \leq m_*(Q),$$

   et conclure.
2. *a*) Rappeler la définition d'une mesure.
   b) En utilisant la question 1.d), montrer la σ-additivité de m.
3. Montrer que m est complète.

Exercice 2 On définit la mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $m_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, par la formule

$$m_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i-1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}.$$

Montrer qu'il s'agit bien d'une mesure extérieure.

Exercice 3 On définit $m_* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$m_*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que m_* est une mesure extérieure.
2. Quels sont les ensembles m_*-mesurables ?
3. Vérifier le théorème de Carathéodory sur cet exemple.

2 Aire de $\mathcal{S}_{n-1}$ et Volume de $\mathcal{B}_n$

Exercice 4
1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
   Indication : On pourra d'abord calculer $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ en passant en coordonnées polaires.
2. *Calcul de l'aire de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{S}_{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{A}_{n-1}$ son aire. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \ldots dx_n$$
   en fonction de $\mathcal{A}_{n-1}$. En déduire l'expression de $\mathcal{A}_{n-1}$ en fonction de la fonction Γ :
$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$
3. *Calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{V}_n$ son volume. Montrer que $\mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{A}_{n-1}}{n}$. En déduire que :
$$\mathcal{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$
4. *Application :* Que vaut l'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$? Que vaut le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 *Cet exercice fournit une autre méthode de calcul du volume de la boule unité* $\mathcal{B}_n$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et de l'aire de la sphère* $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On conserve les notations de l'exercice précédent.
1. Montrer que $\mathcal{V}_n = I_n \cdot \mathcal{V}_{n-1}$, où $I_n = \int_0^\pi (\sin\theta)^n\, d\theta$.
2. Vérifier que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
3. Calculer $\mathcal{V}_n$ pour $n = 1, 2, \ldots, 7$.
4. Calculer $\mathcal{A}_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \ldots, 6$.