Solution de la séance d'exercices 2 : Intégrales généralisées et théorie de la mesure

Rappel :

Definition 1 Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ (on admet les cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$). Supposons que la fonction $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ possède une limite I lorsque $\alpha \to a$ et $\beta \to b$. On dit alors que l'intégrale généralisée ou impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente et que I est la valeur de cette intégrale.

Proposition 1 (Condition de Cauchy) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment $[a, x]$, $x > a$. Pour que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_x^{x'} f(t)\,dt$ tende vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$.

Théorème 1 Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors F est continue sur $[a, b]$. De plus, si f est continue en un point x de $[a, b]$, alors F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Definition 2 Étant donné une fonction réelle g sur $[a, b]$, on appelle *primitive* de g sur $[a, b]$ une fonction $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que G est dérivable en tout point $x \in [a, b]$ et $G'(x) = g(x)$. Une fonction Riemann-intégrable f sur $[a, b]$ n'admet pas nécessairement de primitive, mais si f est continue sur $[a, b]$, le théorème 1 assure que $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

Théorème 2 Soient Λ un espace métrique, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \times \Lambda \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda)\,dt$ est continue.

Théorème 3 Soient Λ un ouvert de $\mathbb{R}$, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \times \Lambda \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que la fonction f possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ par rapport à la deuxième variable qui soit une fonction continue sur $[a, b] \times \Lambda$. Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée vaut $F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda)\,dt$.

Théorème 4 Soit F_n est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, qui converge uniformément vers F. Supposons que, pour tout $1 \leq j \leq k$, la suite des $j^{\text{ième}}$ dérivées $F_n^{(j)}$ converge uniformément vers une fonction g_j. Alors F est de classe $\mathcal{C}^k$ et la dérivée $j^{\text{ième}}$ de F vaut $F^{(j)} = g_j$.

1 Intégrales généralisées

Exercice 1 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Pour $n \geq 0$, on a $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t}$, donc

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt \;\leq\; \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Or $|\sin t| = (-1)^n \sin t$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$. Ainsi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt = (-1)^n \left[-\cos t\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$

Il en découle que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* D'après l'énoncé, F est une primitive de f et est positive et décroissante. Puisque la fonction g admet des primitives, la fonction $G(y) := \int_a^y g(x)\, dx$ est la primitive de g s'annulant en a. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour montrer qu'il existe $y \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^y g(x)\, dx,$$

il suffit de montrer que

$$F(a) \min_{y \in [a,b]} G(y) \;\leq\; \int_a^b F(x)g(x)\, dx \;\leq\; F(a) \max_{y \in [a,b]} G(y).$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)\, dx.$$

Comme f est négative sur $[a, b]$, on a :

$$\min_{y \in [a,b]} G(y) \int_a^b -f(x)\, dx \;\leq\; -\int_a^b f(x)G(x)\, dx \;\leq\; \max_{y \in [a,b]} G(y) \int_a^b -f(x)\, dx,$$

$$\Leftrightarrow \; \min_{y \in [a,b]} G(y) \left(F(a) - F(b)\right) \;\leq\; -\int_a^b f(x)G(x)\, dx \;\leq\; \max_{y \in [a,b]} G(y) \left(F(a) - F(b)\right).$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} F(b)\left(G(b) - \min_{y \in [a,b]} G(y)\right) + F(a) \min_{y \in [a,b]} G(y) \;&\leq\; \int_a^b F(x)g(x)\, dx \\ &\leq\; F(b)\left(G(b) - \max_{y \in [a,b]} G(y))\right) + F(a) \max_{y \in [a,b]} G(y). \end{aligned}$$

Les inégalités $G(b) - \min_{y \in [a,b]} G(y) \;\geq\; 0$ et $G(b) - \max_{y \in [a,b]} G(y) \;\leq\; 0$ et la positivité de F permettent de conclure.

3. D'après le critère de Cauchy (Prop. 1), pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente, il suffit de montrer que $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\, dt$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$. D'après la formule de la moyenne appliquée à $F(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, il vient :

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1}{x} \int_x^y \sin t\, dt$$

pour un certain $y \in [a, b]$. On en déduit que

$$\left| \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| = \frac{1}{x} |\cos y - \cos x| \leq \frac{2}{x}.$$

Ainsi $\lim_{x, x' \to +\infty} \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

4. *a*) Posons pour $t > 0$, $U(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t}$. On a $u(t) = U'(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t + 1) < 0$. Ainsi U est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour $0 < x \leq y$, il vient :

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| = \left|\int_x^y U(t)\sin t\,dt\right| = \left|\frac{e^{-\lambda x}}{x}\int_x^{y'} \sin t\,dt\right|,$$

pour un certain $y' \in [x, y]$. On en déduit que

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x}.$$

b) On remarque que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t, \lambda)$ est continue sur $[0, x]$, donc Riemann-intégrable sur cet intervalle. D'après le critère de Cauchy et la question 4.*a*), les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ sont convergentes. Soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$. Pour montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ convergent uniformément en $\lambda \geq 0$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ et pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

Or, d'après la question 4.*a*),

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x} \leq \frac{2e^{-\lambda x_0}}{x_0} \leq \frac{2}{x_0}.$$

Ainsi pour $x_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, on a l'inégalité désirée, et ce indépendamment de la valeur de λ. Posons $F_n(\lambda) = \int_0^n f(t,\lambda)\,dt$. D'après ce qui précède,

$$\sup_{\lambda\in[0,+\infty[} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq \frac{2}{n},$$

i.e. F_n converge uniformément vers F sur $[0, +\infty[$. Comme les fonction F_n sont continues, il en découle que F est continue. On peut aussi revenir à la définition de continuité : pour montrer que la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est continue en un point $\lambda_0 \in [0, +\infty[$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de λ_0 tel que $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \varepsilon$ pour tout λ dans ce voisinage. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et posons $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt - \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \frac{2}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de trouver un voisinage de λ_0 tel que $\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout λ dans ce voisinage. L'existence d'un tel voisinage est guaranti par la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{x_\varepsilon} f(t,\lambda)\,dt$ donnée par le théorème 2. On peut également déterminer l'existence de ce voisinage à la main de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0))\,dt\right| &\leq \int_0^{x_\varepsilon} |(f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)|\,dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right| \int_0^{x_\varepsilon} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt, \\
&\leq x_\varepsilon \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right|,
\end{aligned}$$

où l'on a utiliser l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$. On a :

$$\begin{aligned}\left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right| &= \left|e^{-\frac{(\lambda+\lambda_0)t}{2}}\left(e^{-\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}} - e^{\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}}\right)\right| \\ &\leq 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|t}{2}\right) \leq 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|x_\varepsilon}{2}\right),\end{aligned}$$

car la fonction sinh est croissante. Ainsi le voisinage de λ_0 déterminé par $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{3}\text{argsinh}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right)$ convient.

c)Pour $x \in [0,+\infty[$ et $\lambda \in]0,+\infty[$, posons

$$\tilde{F}(x,\lambda) = \int_0^x f(t,\lambda)\,dt.$$

D'après le théorème 3, la fonction $\tilde{F}$ est dérivable par rapport à la deuxième variable et sa dérivée partielle vaut :

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda}(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial\lambda}(t,\lambda)\,dt.$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\tilde{F}(x,\lambda)$ tend vers $F(\lambda)$. D'après la question 4.b) cette convergence est uniforme pour $\lambda \geq 0$. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ tend vers $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt$. On peut montrer comme dans la question 4.b) que cette convergence est uniforme pour $\lambda > 0$ (attention il faut exclure $\lambda = 0$ ici). Il en découle que $\lim_{h\to 0}\frac{F(\lambda+h)-F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$ (écrivez l'argument ! On pourra soit utiliser le théorème 4, soit le montrer à la main...).

d) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}-\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt &= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\cos t\,dt \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\sin t\,dt \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\sin t\,dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$-\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2}.$$

On en déduit que

$$F'(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}.$$

e) De la question précédente, il découle que

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + C,$$

où C est une constante réelle. Montrons que $F(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x > \frac{4}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}|F(\lambda)| &= \left|\int_0^x e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\ &\leq \int_0^x e^{-\lambda t}\frac{|\sin t|}{t}\,dt + \left|\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\ &\leq \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

où on a utiliser que $|\sin t| \leq t$ et la question $4.b$). Ainsi

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda x_0}}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} = 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que pour $\lambda > \lambda_0$, $|F(\lambda)| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 0$. Alors $C = \lim_{\lambda \to +\infty} \arctan \lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$F(\lambda) = -\arctan \lambda + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

2 Théorie de la mesure

Exercice 2 *cf Proposition 5.1. du polycopié de Marc Troyanov.*

Exercice 3 *Découle directement des définitions.*