Séance d'exercices 1 : Intégrale de Riemann

le 24 octobre 2006

1 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Exercice 1 En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes :

1. Si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, alors $f + g$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
2. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
3. Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ telles que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$.
4. Une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

2 Quelles sont les fonctions Riemann-intégrables ?

Exercice 2 Montrer qu'une fonction *monotone* sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 3 Montrer qu'une fonction *continue* sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.
2. Montrer que la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 5 (facultatif) On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ telle que :
$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.
2. Montrer qu'une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si l'ensemble des points où f n'est pas continue est *négligeable.*

3 Peut-on intervertir limite et intégrale ?

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement vers une fonction f sur $]0, 1]$ mais que
$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx \quad \neq \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$
Vérifier que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ vers f n'est pas *uniforme* sur $]0, 1]$.

4 Applications

Exercice 7 Montrer que, si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

En déduire les limites suivantes :

$$a)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} \qquad b)\quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad c)\quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 8

1. Montrer que si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. Calculer (en utilisant 1.) les intégrales suivantes :

$$a)\quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad\qquad b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan x\right)\,dx.$$

Rappel : $\quad \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$