**Université Lille I** Année 2008-2009
S2 PC, M104 **Interro 2 du 10-03-09**

# Algèbre linéaire

*Aucun document n'est autorisé : ni notes de cours, ni calculatrice, ni téléphone portable. La durée de l'interrogation est de 30 minutes.*

## Question de cours

**a.** Donner la définition du rang d'une application linéaire, et énoncer (précisément) le théorème du rang.
**b.** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$. $f$ peut-elle être injective ? surjective ? bijective ? Justifier vos réponses.

## Exercices

**Exercice 1.** Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ 2x-y+5z \\ 2x+y+3z \end{pmatrix}.$$

**a.** Montrer que $f$ est linéaire.
**b.** Donner la matrice $A$ de $f$ (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$).
**c.** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. $f$ est-elle surjective (justifier) ?
**d.** Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$. $f$ est-elle injective (justifier) ?
**e.** Le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient-il à $\mathrm{Im}(f)$ ?
**f.** Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à $\ker(f)$ ?

**Exercice 2.** Résoudre, suivant les valeurs du paramètre $a$, le système

$$\begin{cases} ax & +2y & = a+1 \\ (a-1)x & -ay & = 2a \end{cases}$$

**Université Lille I** Année 2008-2009
S2 PC, M104 **Interro 2 du 10-03-09**

# Correction de l'interro

## Question de cours

**a. (5 pts.)** Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On appelle rang de $f$ l'entier $r = \dim(\mathrm{Im}(f))$ la dimension de l'image de $f$.
Théorème du rang : Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors on a l'égalité

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n.$$

**b. (3 pts.)** Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être injective. En effet, si $f$ est injective, alors $\ker(f) = \{0\}$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$. Le théorème du rang donne alors l'égalité $0 + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 5$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 5$, mais comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 3$, ce qui est absurde, donc $f$ ne peut pas être injective.
En revanche, $f$ peut être surjective, le théorème du rang ne donne pas de contradiction. On dispose par exemple de l'application $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(v, w, x, y, z) = (x, y, z)$ qui est linéaire et surjective.
Enfin, $f$ ne peut pas être bijective car en particulier $f$ n'est pas injective.

## Exercices

**Exercice 1.**
**a. (1 pt.)** Calculs (utiliser la linéarité des espaces $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ et la définition de $f$).
**b. (1 pt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**c. (2 pt.)** En appliquant la "technique 2" du cours (pivot de Gauss sur les colonnes de $A$ bordée en bas par $I_3$), on trouve par exemple la base

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathrm{Im}(f)$, qui est donc de dimension 2. $f$ n'est donc pas surjective car d'après le cours, $f$ est surjective si et seulement si $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.
**d. (2 pt.)** En appliquant la "technique 2" du cours (pivot de Gauss sur les colonnes de $A$ bordée en bas par $I_3$), on trouve par exemple la base

$$\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\ker(f)$, qui est donc de dimension 1. $f$ n'est donc pas injective car d'après le cours, $f$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

**e. (1 pts.)** Pour vérifier si le vecteur $\vec{a}$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il s'agit de trouver un vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(\vec{c}) = \vec{a}$. Cela revient à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +y & +z & = & 3 \\ 2x & -y & +5z & = & 0 \\ 2x & +y & +3z & = & 4 \end{array} \right.$$

A l'aide du pivot de Gauss on trouve les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2z \\ y = z + 2 \end{array} \right.$$

et donc en prenant $z = 0$ (par exemple) on obtient $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{a} \in \mathrm{Im}(f)$.

**f. (1 pts.)** Non. Il suffit de calculer $f(\vec{b}) \neq 0$.

**Exercice 2.**
**(4 pts.)** Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss à ce système. **Supposons d'abord** $a \neq 0$. On obtient le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{lllll} ax & +2y & = a+1 & L_1 \\ & -\frac{a^2+2a-2}{a}y & = \frac{a^2+1}{a} & L_2 - \frac{a-1}{a}L_1 \end{array} \right.$$

On peut résoudre la dernière équation (puis la première) si $a^2 + 2a - 2$ ne s'annule pas, c'est à dire si $a \neq -1 \pm \sqrt{3}$. **Supposons donc que** $a \neq 0$ **et** $a \neq -1 \pm \sqrt{3}$. On obtient alors les solutions

$$\left( x = \frac{a(a+5)}{a^2 + 2a - 2}, y = -\frac{a^2 + 1}{a^2 + 2a - 2} \right).$$

**Si** $a = -1 \pm \sqrt{3}$, alors la dernière équation devient $0 = \frac{5 \mp 2\sqrt{3}}{-1 \pm \sqrt{3}} \neq 0$, il n'y a donc pas de solutions.
Enfin, **si** $a = 0$, le système de départ donne immédiatement $y = \frac{1}{2}$ et $x = 0$.