REVISION DEVELOPPEMENTS LIMITES **LUNDI 5 JANVIER 2004**

NOM : .... **Prénom :** ....

1. DL DES FONCTIONS ELEMENTAIRES :

Ecrire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions élémentaires suivantes à un ordre général (n, 2n+1 ou 2n+2 selon le cas), puis à l'ordre 5 :

$e^x =$ ....

$\sin x =$ ....

$\cos x =$ ....

$\frac{1}{1+x} =$ ....

$\ln(1+x) =$ ....

$(1+x)^\alpha =$ ....

Réf : Tableau p135 poly orange.

Application : DL à l'ordre 3 de : $\sqrt{1+x} =$ ....

2. RECONNAITRE UN DL :

Un DL à l'ordre n est une approximation (pertinente au voisinage d'un point x_0 donné) d'une fonction (non polynomiale en général) par un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Le reste (différence entre la fonction de départ et le polynôme) est alors de la forme $(x-x_0)^n\epsilon(x-x_0)$, avec $\lim_{x\to x_0}\epsilon(x-x_0)=0$, ce qui exprime le fait que l'ordre de l'approximation est n, le point au voisinage duquel l'approximation est pertinente est x_0, et que le reste tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Question 1 : Que ce passe-t-il quand la fonction à approximer est un polynôme ?
Ecrire les développements limités de la fonction $f(x) = x^2$ au voisinage de 0 à l'ordre 0, 1 et $n \geq 2$ et préciser à chaque fois les fonctions $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_n$ intervenant.

$x^2 =$ .... $\epsilon_0 =$ .... $x^2 =$ .... $\epsilon_1 =$ .... $x^2 =$ .... $\epsilon_n =$ ....

Question 2 : Que ce passe-t-il quand la fonction à approximer n'est pas continue en x_0 ?
Supposons que la fonction définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ possède un DL à l'ordre 0 au voisinage de 0, c-à-d que f s'écrive $f(x) = a_0 + \epsilon(x)$ au voisinage de 0, avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.
Que vaut alors : $\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \sin(\frac{1}{x}) =$ ...... ? Est-ce possible ?
La fonction f possède-t-elle un DL à l'ordre 0 en $x_0 = 0$?
Que vaut $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) =$ ...... ?
La fonction $g(x) = x^{2000}\sin(\frac{1}{x})$ possède-t-elle un DL à l'ordre 1999 ?
Si oui, que vaut $\epsilon(x) =$ .... ?
La fonction $g(x) = x^{2000}\sin(\frac{1}{x})$ possède-t-elle un DL à l'ordre 2000 ?
Si oui, que vaut $\epsilon(x) =$ .... ?

Question 3 : Que ce passe-t-il quand la fonction à approximer n'est pas dérivable en x_0 ?
Supposons que la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x|}$ possède un DL à l'ordre 1 au voisinage de 0, c-à-d que f s'écrive $f(x) = a_0 + a_1 x + x\epsilon(x)$ au voisinage de 0, avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
Que vaut alors : $a_0 = \ldots\ldots$?
Que vaut alors : $\lim_{\substack{x\neq \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ldots\ldots$? Est-ce possible ?
La fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ possède-t-elle un DL à l'ordre 0 en $x_0 = 0$?
A l'ordre 1 ?
La fonction $g(x) = x^2\sqrt{|x|}$ possède-t-elle un DL à l'ordre 2 en $x_0 = 0$?
A l'ordre 3 ?

Application : Ecrire sans calcul les DL à l'ordre maximun possible des fonctions suivantes et préciser les fonctions $\epsilon(x)$ intervenant :

$f(x) = 3 - 4x^2 + x^{2000}\sin\frac{1}{x}, x \neq 0, f(0) = 3.$	$g(x) = 3 - 5x + 7x^3 + x^2\sqrt{\lvert x\rvert}.$
$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\epsilon(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\epsilon(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. REGLES DE CALCUL AVEC LES DL :

(1) **Changement de variable dans un développement limité :** La variable "x" dans les formules des DL des fonctions élémentaires est "muette" et peut-être remplacée par n'importe quoi, à condition que ca tende vers 0 ! On utilisera des parenthèses !

Application : Ecrire le développement limité de e^{ix} et $\sin(2x)$ à l'ordre 5 :

$e^{ix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sin(2x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) **Somme de développements limités :** On ne peut sommer que des DL au vois. du même point et au même ordre. Si on part de deux DL à des ordres différents, on commence par les écrire à l'ordre le plus petit des deux avant de les sommer.

Application : Ecrire le développement limité de $\cos(x) + i\sin(x)$ à l'ordre 5 :

$\cos(x) + i\sin(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) **Produit de développements limités :** On ne peut multiplier que des DL au vois. d'un même point et au même ordre. Si on part de deux DL à des ordres différents, on commence par les écrire à l'ordre le plus petit des deux avant de les multiplier.

Application : Ecrire le développement limité de $2\sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 5 :

$2\sin(x)\cos(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(4) **Multiplication par x :** Un DL à l'ordre n au voisinage de 0 multiplié par x donne un DL à l'ordre n+1 au voisinage de 0.

Application : Ecrire les DL des fonctions suivantes à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

$x\cos x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^2(1 - \cos(2x)) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(5) **Division par x :** Un DL à l'ordre n au vois. de 0 sans terme constant divisé par x donne un DL à l'ordre n-1 au voisinage de 0.

Application : Ecrire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :

$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(6) **Composition de développements limités :** Composer deux développements limités, c'est remplacer la variable muette "x" dans l'écriture d'un DL par un autre DL. Cela est possible à condition que :
- les DL soient au même ordre (sinon s'y ramener),
- si la variable x du premier DL tend vers x_0 on ne pourra la remplacer que par quelque chose que tend vers x_0 ! Sinon, il faut s'y ramener...

Application : Ecrire les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$\ln(1+\sin(x)) =$ ....

$\ln(\cos(x)) =$ ....

$e^{2\ln(1+x)} =$ ....

Attention pour les suivants il faut ruser ! ! !

$\ln(2+\sin(x)) =$ ....

formule utilisée : ....

$e^{\sqrt{1+x}} =$ ....

formule utilisée : ....

$e^{\cos(x)} =$ ....

formule utilisée : ....

$\cos(\frac{\pi}{2}+x) =$ ....

formule utilisée : ....

$\sin(\pi+x) =$ ....

formule utilisée : ....

(7) **Quotient de développements limités :** Pour calculer le développement limité de $\frac{f}{g}$ à partir des DL de f et de g on commence par écrire le DL de $\frac{1}{g}$ grâce au DL de $\frac{1}{1+u}$, puis on multiplie par le DL de f.

Application : Ecrire les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$\frac{1}{x^2+x+1} =$ ....

$\frac{x^5+2x+1}{x^2+x+1} =$ ....

$\frac{1}{\cos x} =$ ....

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} =$ ....

(8) **Intégration d'un développement limité :** Si l'on a le DL de f' à l'ordre n au vois. de 0, on obtient le DL de f à l'ordre $n+1$ au vois. de 0 en intégrant terme à terme et en rajoutant comme terme constant $f(0)$.

Application : Ecrire les DL à l'ordre général au voisinage de 0 de :

$\frac{1}{1+x} =$ ....

$\ln(1+x) =$ ....

$\frac{1}{1+x^2} =$ ....

$\arctan(x) =$ ....

(9) **DL au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$:** Pour effectuer le DL au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$, on pose le changement de variable : $h = x - x_0$, on remplace la variable x par $x_0 + h$ partout et on effectue le DL au vois. de 0 en la variable h. La dernière étape consiste à remplacer les puissances de h par les puissances de $(x - x_0)$, et surtout on s'arrête là (on ne développe pas) !

Application : Ecrire les DL à l'ordre général au voisinage de x_0 de :

$x_0 = \frac{\pi}{2}$: $\cos(x) =$ ....

$x_0 = \pi$: $\sin(x) =$..

$x_0 = \frac{1}{2}$: $\ln(x + \frac{1}{2}) =$..

(10) **DL au voisinage de $+\infty$:** Pour effectuer le DL au vois. de $+\infty$ en la variable x, on pose le changement de variable : $X = \frac{1}{x}$, on remplace la variable x par $\frac{1}{X}$ partout, on simplifie eventuellement l'expression et on effectue le DL au vois. de 0 en la variable X. La dernière étape consiste à remplacer les puissances de X par les puissances de $\frac{1}{X}$.

Application : Ecrire les DL à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de :

$\ln(1 + \frac{2}{x}) =$ ....

$x \ln(\frac{x+1}{x}) =$ ....

⇒⇒ **Exo de partiels correspondants :** Exo I p199, Exo 4 p237 et Exo 5 p239.

4. APPLICATIONS DES DL :

(1) **Calcul de limites :** Certains calculs de limite ne sont pas accessibles avec les méthodes étudiées au début de l'année. L'utilisation des DL permet de lever les indéterminations et aussi de retrouver les limites usuelles.

Application : Calculer les limites suivantes : $\frac{\sin(x)}{x} =$..........................

$\lim_{x \to +\infty} x[(1 + \frac{2}{x})^x - (1 + \frac{1}{x})^{2x})] =$..

$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 + 2\ln(\cos x)}{x^2(1 - \cos 2x)} =$ ....

⇒⇒ **Exo de partiels correspondants :** Exo V p210, Exo I p214, Exo I.1. p216, Exo 2.1 p226, Exo I p232.

(2) **Comparaison avec la formule de Taylor pour calculer la valeur des dérivées d'une fonction en un point.** Puisqu'il y a unicité du développement limité (unicité de l'approximation d'une fonction par un polynôme de degré n), comparer DL et formule de Taylor permet de connaitre la valeur des dérivées d'une fonction en un point.

Application : Ecrire la formule de Taylor générale d'une fonction f à l'ordre n entre x_0 et x (Attention aux factorielles ! ! !) :

$f(x) =$..

En utilisant le DL de $\cos x$ en $\pi/2$, retrouver la valeur des dérivées successives de la fonction cosinus en $\pi/2$.

$\cos'(\pi/2) =$ .... $\cos''(\pi/2) =$ .... $\cos^{(n)}(\pi/2) =$ ....

En utilisant le DL de $\arctan x$ en 0, calculer :

$\arctan^{(2n+1)}(0) =$ .... $\arctan^{(2n)}(0) =$ ....

(3) **Continuité, dérivabilité :** Posséder un DL à l'ordre 0 en x_0 est équivalent à être continu en x_0, posséder un DL à l'ordre 1 en x_0 est équivalent à être dérivable en x_0, MAIS posséder un DL à l'ordre 2 en x_0 n'est pas équivalent à être deux fois dérivable en x_0 !

Application : Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f est-elle continue en 0 ?
Que vaut le taux d'accroissement en 0 ?
f est-elle dérivable en 0 ?
f admet-elle un DL à l'ordre 2 en 0 ?
A l'ordre 3 ?
Que vaut f' ?
f' possède-t-elle un DL à l'ordre 0 en 0 ?
Si une fonction f admet un DL à l'ordre 2, sa dérivée f' admet-elle un DL à l'ordre 1 ? Pourquoi ?
Si une fonction f admet un DL à l'ordre 2 et si sa dérivée f' admet un DL à l'ordre 1, comment sont-ils reliés ?

$\Rightarrow\Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants :** Exo I p238, Exo I p210, Exo 2 p232, Exo 3 p242 et Exo 1 p244.

(4) **Equation de la tangente en un point et position de la courbe par rapport à la tangente :** La tangente à f en un point x_0 est la droite d'équation $y = ax + b$ qui colle le mieux à la courbe représentative de f. Son équation est donnée par la partie réguliére du DL de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de la différence $f(x) - y$ qui est déterminée par le signe du premier terme non nul suivant le terme d'ordre 1.

Application : Quelle est l'équation de la tangente à $f(x) = \ln(1 + x)$ en $x = 0$ et la position de la tangente par rapport au graphe de f ?

$y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $f(x) - y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ *ccl* $: \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Quelle est l'équation de la tangente à $f(x) = \sin x$ en $x = 0$ et la position de la tangente par rapport au graphe de f ?

$y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $f(x) - y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ *ccl* $: \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\Rightarrow\Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants :** Exo I p210, Exo III p 216, Exo 3 p226, et Exo 3 p244.

(5) **Equation des asymptotes en $\pm\infty$:** Une fonction f possède une asymptote en $+\infty$ si elle peut s'écrire : $f(x) = ax + b + \epsilon(x)$, où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. La position du graphe de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\epsilon(x)$.

Application : En utilisant le DL à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de $\ln(1 + \frac{2}{x})$, donner l'équation de l'asymtote en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{2}{x})$, ainsi que la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Même question en $-\infty$.

En $+\infty$ $: f(x) = \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$ $f(x) - y = \dots\dots\dots$ *ccl* $: \dots\dots\dots$

En $-\infty$ $: f(x) = \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$ $f(x) - y = \dots\dots\dots$ *ccl* $: \dots\dots\dots$

$\Rightarrow\Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants :** Exo 4 p238, Exo 3 p232, Exo I p203, Exo III p 210, Exo I.2. p216, Exo 2.2 p226, Exo 4 p 244.