

SESSION 2010

---

**AGREGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : MATHÉMATIQUES**

**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

**Tournez la page S.V.P.**

## Préambule et notations

On note  $\mathbf{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbf{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbf{Q}$  le corps des nombres rationnels,  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels et  $\mathbf{C}$  le corps des nombres complexes.

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$ . Pour  $p$  entier  $\geq 1$ , on note  $M_p(K)$  l'algèbre des matrices carrées à  $p$  lignes à coefficients dans  $K$ .

Pour  $A \in M_p(K)$  et  $n$  entier  $\geq 1$ , on note  $S_A$  l'ensemble des matrices  $X \in M_p(K)$  telles que  $X^n = A$ .

- On note  $0_p$  la matrice nulle et  $I_p$  la matrice unité de  $M_p(K)$ . Le groupe des matrices inversibles de  $M_p(K)$  est noté  $GL_p(K)$ .
- On note  $C(A)$  le sous-groupe de  $GL_p(K)$  formé des matrices  $P$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire telles que  $AP = PA$ .
- On note  $K[x]$  l'algèbre des polynômes à coefficients dans  $K$  à une indéterminée  $x$ . Un élément non nul de  $K[x]$  est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.
- Le polynôme minimal de toute matrice  $A$  de  $M_p(K)$  est noté  $m_A$ . C'est un polynôme unitaire de  $K[x]$ .
- On note  $K^p$  l'espace vectoriel des matrices-colonnes à  $p$  lignes à coefficients dans  $K$ . L'image  $\text{Im} A$ , le noyau  $\text{Ker} A$ , les sous-espaces stables de  $A$ , le déterminant  $\det A$ , sont ceux de l'endomorphisme  $v \mapsto Av$  de  $K^p$  canoniquement associé à  $A$ .
- La matrice  $A$  de  $M_p(K)$  est semblable sur  $K$  à une matrice  $A'$  de  $M_p(K)$ , s'il existe  $P \in GL_p(K)$  telle que  $A = PA'P^{-1}$ . Cette relation d'équivalence est la similitude.
- Pour  $k$  entier  $\geq 1$ , on note  $N_k \in M_k(K)$  la matrice triangulaire inférieure

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire dont les coefficients sont

$$N_k(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $a \in K$ , on pose  $J_k(a) = aI_k + N_k$ . Pour  $k, \ell$  entiers strictement positifs, on note  $0_{k,\ell}$  la matrice nulle à  $k$  lignes et  $\ell$  colonnes. On appelle matrice de Jordan une matrice  $J$  de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(a_1) & 0_{k_1, k_2} & \cdots & 0_{k_1, k_r} \\ 0_{k_2, k_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{k_{r-1}, k_r} \\ 0_{k_r, k_1} & \cdots & 0_{k_r, k_{r-1}} & J_{k_r}(a_r) \end{pmatrix}$$

où  $a_i \in K$  et  $k_i$  est entier  $\geq 1$  pour tout indice  $i$  de 1 à  $r$ .

- Lorsque le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $K$ , le théorème de Jordan établit l'existence et l'unicité, à permutation près de l'ensemble des indices  $i$  de 1 à  $r$ , d'une matrice  $J$  de Jordan semblable sur  $K$  à  $A$ . Une telle matrice  $J$  est dite réduction de Jordan de  $A$ .
- On note  $\binom{n}{p}$  le coefficient binomial  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

## Partie I.

Dans cette partie, on fixe une matrice  $A \in M_p(\mathbb{K})$ .

1. Soit  $X$  un élément de  $S_A$ .
  - (a) Démontrer que  $X$  commute avec  $A$ .
  - (b) Montrer que le polynôme minimal  $m_X$  de  $X$  divise  $m_A(x^n)$ .
  - (c) On suppose que  $n$  et  $p$  sont  $\geq 2$ . Montrer que  $S_{0_p}$  est infini.
  - (d) On suppose que  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux. Soit  $\lambda \in K$ . Montrer que  $S_{\lambda I_p}$  est vide si et seulement si le polynôme  $x^n - \lambda^p$  n'a pas de racine dans  $K$ .
2. (a) Soit  $A'$  semblable sur  $\mathbb{K}$  à  $A$ . Montrer qu'il existe  $P \in GL_p(\mathbb{K})$  telle que
$$S_{A'} = \{PXP^{-1}, X \in S_A\}$$
  - (b) Soit  $P$  une matrice de  $GL_p(\mathbb{K})$  et  $X \in S_A$ . Démontrer que  $PXP^{-1}$  est aussi dans  $S_A$  si et seulement si  $P$  commute avec  $A$ .
3. On considère une matrice  $A'$  de  $M_p(\mathbb{K})$  semblable sur  $\mathbb{C}$  à  $A$ . Soit  $L$  le corps de décomposition de  $m_A$ , i.e. le plus petit sous-corps de  $\mathbb{C}$  contenant  $\mathbb{K}$  et pour lequel  $m_A$  est scindé sur  $L$ .
  - (a) Montrer que le corps de décomposition d'un polynôme de  $\mathbb{K}[x]$  de degré  $r$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $d \leq r!$ .
  - (b) Démontrer qu'une fonction polynôme à  $d$  variables, à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , non nulle sur  $\mathbb{C}^d$  est non nulle sur  $\mathbb{K}^d$ .
  - (c) A l'aide du théorème de Jordan, démontrer que  $A'$  est semblable à  $A$  sur  $L$ .
  - (d) Prouver que  $A'$  est semblable à  $A$  sur  $\mathbb{K}$ .
4. (a) Soit  $m$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{K}[x]$  de degré  $\leq p$ . Montrer que l'ensemble des matrices de  $M_p(\mathbb{K})$  de polynôme minimal  $m$  est la réunion d'un ensemble fini de classes de similitude sur  $\mathbb{K}$  de matrices de  $M_p(\mathbb{K})$ .
  - (b) En déduire que  $S_A$  est la réunion d'un ensemble fini d'orbites pour l'action de  $C(A)$  sur  $M_p(\mathbb{K})$  par automorphisme intérieur.
5. (a) On suppose que  $C(Y) = C(A)$  pour toute solution  $Y$  dans  $S_A$ . Montrer que  $S_A$  est fini.
  - (b) On suppose qu'il existe  $Y \in S_A$  pour laquelle  $C(Y) \neq C(A)$ . Montrer que  $S_A$  est infini.
6. (a) Montrer qu'il existe  $q \in \mathbb{K}[x]$  tel que  $q(N_p)^n = I_p + N_p$ .
  - (b) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , montrer que si  $A$  est inversible, alors  $S_A \neq \emptyset$ .

## Partie II.

1. Montrer qu'il existe une norme  $N$  sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $M_p(\mathbb{C})$  vérifiant  $N(BC) \leq N(B)N(C)$  pour toutes matrices  $B$  et  $C$  de  $M_p(\mathbb{C})$ .

Dans toute cette partie  $N$  est une telle norme et  $A$  est une matrice de  $GL_p(\mathbb{K})$ ; une matrice  $X$  est dans  $S_A$  si et seulement si  $X^{-n} - B = 0_p$  où  $B = A^{-1}$ . Ceci conduit à introduire la suite :

$$X_{k+1} = (1 + 1/n)X_k - (1/n)BX_k^{n+1}$$

de premier terme  $X_0$  commutant avec  $A$ .

2. On suppose dans cette question que la suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $Y$  de  $GL_p(\mathbb{C})$ .

- (a) Démontrer que pour tous  $k, k' \in \mathbf{N}$ , les matrices  $X_k, X_{k'}, Y$  et  $A$  commutent deux à deux.  
 (b) Démontrer que  $Y^n = A$ .  
 (c) On pose  $U_k = X_k Y^{-1} - I_p$ . Démontrer que la suite  $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$  vérifie la relation de récurrence :

$$nU_{k+1} + \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} U_k^j = 0_p.$$

3. Soit  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels.

- (a) Démontrer qu'il existe un unique réel  $r > 0$  tel que

$$nr = \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} r^j.$$

- (b) Démontrer que la suite récurrente définie par  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $0 \leq x_0 < r$  et

$$x_{k+1} = (1/n) \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} x_k^j$$

converge en précisant sa limite.

4. Soit  $Y \in M_p(\mathbf{C})$  une solution de  $Y^n = A$ . On suppose que  $X_0$  est une matrice de  $M_p(\mathbf{K})$  qui commute avec  $Y$ . Déterminer  $\alpha > 0$  tel que  $N(X_0 - Y) < \alpha$  entraîne que la suite  $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  converge vers  $Y$ .

### Partie III.

Dans cette partie  $A$  est une matrice de  $M_p(\mathbf{K})$ , telle qu'il existe un vecteur  $v$  de  $\mathbf{K}^p$  tel que  $(A^j v)_{0 \leq j < p}$  est une base de  $\mathbf{K}^p$ .

- (a) Soit  $X$  un élément de  $S_A$ . Montrer qu'il existe  $h \in K[x]$ , de degré  $< p$ , tel que  $X = h(A)$ .  
 (b) En déduire que  $S_A$  est en bijection avec l'ensemble des éléments  $z$  de  $K[x]/(m_A)$  tels que  $z^n = \bar{x}$ , où  $\bar{x}$  est la classe de  $x \pmod{m_A}$ .  
 On rappelle que  $(m_A)$  est l'idéal de  $K[x]$  engendré par  $m_A$ .  
 (c) Montrer que, si  $m_A$  est irréductible dans  $K[x]$ ,  $S_A$  admet au plus  $n$  éléments. En déduire que, si  $m_A$  est un produit de  $s$  polynômes irréductibles distincts,  $S_A$  admet au plus  $n^s$  éléments.  
 (d) Montrer que, si  $p$  et  $n$  sont  $\geq 2$ , et si  $m_A = x^p$ , alors  $S_A$  est vide.  
 (e) Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $K[x]$  premiers entre eux, et  $r$  un entier  $\geq 1$ . On suppose qu'il existe  $y_1 \in K[x]$  tel que  $y_1^n \equiv g \pmod{f^r}$ . Montrer qu'il existe un élément  $y_2 \in K[x]$ , unique modulo  $f^{r+1}$ , tel que

$$\begin{cases} y_2 \equiv y_1 \pmod{f^r} \\ y_2^n \equiv g \pmod{f^{r+1}} \end{cases}$$

(On pourra poser  $y_2 = y_1 + f^r q$ , et développer  $y_2^n$ .)

- (f) Soit  $s$  le nombre de facteurs irréductibles distincts de  $m_A$ . Montrer que  $S_A$  a au plus  $n^s$  éléments.
- Montrer que, si  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  et si  $m_A$  n'a pas de racine réelle,  $S_A$  est non vide.
- Soit  $r$  et  $s$  des rationnels tels que  $\cos(r\pi) = s$ .

- (a) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on définit  $a_n = 2 \cos(2^n r \pi)$ . Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ . Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de nombres rationnels, périodique à partir d'un certain rang.
- (b) Démontrer que si  $b_n$  est le dénominateur  $> 0$  de la forme irréductible de  $a_n$ , alors  $b_n^2$  est celui de  $a_{n+1}$ .
- (c) En déduire que  $|s| \in \{0, 1/2, 1\}$ .

4. Soit  $n$  un entier  $> 1$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer  $S_A$  lorsque  $K = \mathbf{R}$ .
- (b) Déterminer  $S_A$  lorsque  $K = \mathbf{Q}$ .
- (c) Déterminer  $S_A$  lorsque  $K = \mathbf{C}$ .

#### Partie IV.

On note  $d_1 = \dim \text{Ker } A$ , et pour tout  $i \geq 2$ ,  $d_i = \dim \text{Ker } A^i - \dim \text{Ker } A^{i-1}$ .

1. On suppose dans cette question qu'il existe  $k \geq 1$  tel que le polynôme minimal de  $A$  est  $x^k$ .
- (a) Démontrer que pour tout  $X$  dans  $S_A$ , il existe un entier  $r$  tel que  $m_X = x^r$  et

$$(k-1)n < r \leq kn.$$

(b) En déduire que, si  $(k-1)n \geq p$ , alors  $S_A = \emptyset$ .

2. Soit  $X$  une matrice de  $M_p(K)$  telle qu'il existe  $v$  dans  $\text{Ker } X^p$  pour lequel  $(X^j v)_{0 \leq j < p}$  est une base  $\mathcal{B}$  de  $K^p$ .

(a) Calculer la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $X^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

(b) En déduire une réduction de Jordan de  $X^n$ .

(c) Soit  $A = \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$ . Quel est l'ensemble des valeurs de  $n$  pour lesquelles  $S_A$  est non vide?

3. On suppose dans cette question que

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{k_r} \end{pmatrix}$$

est une réduction de Jordan de  $A$ .

(a) Montrer que  $d_i = \text{Card}\{j \leq r, k_j \geq i\}$ .

(b) On suppose que  $S_A \neq \emptyset$ . Montrer que pour tout entier  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i \in ]ns, n(s+1)[$ .

(c) Soit  $J = \begin{pmatrix} N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}$ . Pour quels  $n$  a-t-on  $S_J = \emptyset$ ?

(d) Etablir la réciproque de la question (b) (*On pourra raisonner par récurrence.*)

4. Montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $B$  et  $C$  sont des matrices carrées à coefficients dans  $K$  telles que  $B^p = 0$  et  $\det C \neq 0$ , puis qu'il existe une application bijective  $\varphi : S_B \times S_C \rightarrow S_A$ .

5. On suppose ici que  $K = \mathbf{C}$ . Montrer que  $S_A$  est non vide si et seulement si, pour tout entier  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i \in ]ns, n(s+1)[$ .