composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Avertissement.

Les parties I et II sont indépendantes du reste du problème. Le candidat est libre de traiter le problème dans l'ordre qu'il souhaite en admettant clairement des résultats énoncés dans des questions précédentes du problème. Il sera tenu le plus grand compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Notations.

Si A est une partie d'un ensemble B, on notera $B - A$ le complémentaire de A dans B. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. On note $\| \ \|$ la norme de l'espace vectoriel euclidien dirigeant $\mathscr{E}$. Par sous-espace de $\mathscr{E}$, on entend sous-espace affine de $\mathscr{E}$ muni de la structure euclidienne induite. Pour tout point c de $\mathscr{E}$ et tout réel $r > 0$, on note $B(c, r)$ (resp. $S(c, r)$) la boule ouverte (resp. la sphère) de centre c et de rayon r, c'est-à-dire :

$$B(c, r) = \{p \in \mathscr{E} \mid \|p - c\| < r\} \quad \text{et} \quad S(c, r) = \{p \in \mathscr{E} \mid \|p - c\| = r\}.$$

Toutes les boules ou sphères considérées dans le problème sont de rayon strictement positif. On appelle *cercle* une partie C de $\mathscr{E}$ telle qu'il existe un sous-espace $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$ de dimension 2, un point c de $\mathscr{P}$ et un réel $r > 0$ tel que $C = \mathscr{P} \cap S(c, r)$. On appelle alors *disque de bord* C l'ensemble $D = \{p \in \mathscr{P} \mid \|p - c\| \leq r\}$.

PARTIE I

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2. On veut montrer que l'on ne peut pas recouvrir $\mathscr{E}$ par un famille de cercles disjoints. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une partition de $\mathscr{E}$ en cercles C_i de rayon $r_i > 0$; on note D_i le disque de bord C_i.

1. Construire une suite $(i_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de I telle que :
$$D_{i_{n+1}} \subset D_{i_n} \quad \text{et} \quad r_{i_{n+1}} \leq \frac{1}{2} r_{i_n}$$
pour tout n.

2. Que dire de $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} D_{i_n}$?

3. Conclure.

PARTIE II

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3.

1. Soint p et q des points distincts d'un cercle C et soit D le disque de bord C. Montrer que $D - \{p, q\}$ est réunion disjointe de segments de droites de longueur non nulle (on dessinera *d'abord* soigneusement la famille choisie et on démontrera *ensuite* qu'elle convient).

2. Soient p et q des points distincts d'une sphère S. Montrer que l'on peut recouvrir $S - \{p, q\}$ par une famille de cercles disjoints (on pourra utiliser la question précédente).

Soient Δ une droite de $\mathscr{E}$ et O un point de Δ.

3. Montrer que l'on peut trouver une famille de cercles $(C_m)_{m \in \mathbf{Z}}$ telle que :
   - les centres des cercles C_m soient sur Δ;
   - toute sphère de $\mathscr{E}$ de centre O coupe $\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} C_m$ en exactement deux points (on dessinera *d'abord* soigneusement la famille choisie et on démontrera *ensuite* qu'elle convient).

4. Montrer que $\mathscr{E}$ est réunion disjointe de cercles.

PARTIE III

Dans toute la suite du problème, on munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, du produit scalaire usuel, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On identifiera souvent une matrice réelle M carrée d'ordre n et l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice M dans la base canonique. En particulier, si P est une partie de $\mathbf{R}^n$, on note $\mathrm{M}(\mathrm{P})$ l'ensemble des $\mathrm{M}(x)$, pour x parcourant P. On notera $\|\mathrm{M}\|$ la norme de l'endomorphisme M, c'est-à-dire :

$$\|\mathrm{M}\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\| = 1} \|\mathrm{M}(x)\|.$$

On rappelle le théorème d'orthonormalisation : étant donné une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, il existe une unique base *orthonormée* $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que y_i soit dans l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_i$ et que $\langle x_i, y_i \rangle$ soit strictement positif pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices M telles que M et M^{-1} soient à coefficients entiers.

1. Montrer que toute matrice M de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme $\mathrm{M} = \mathrm{KDT}$, où K est une matrice orthogonale, D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, et T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1 (on pourra appliquer le théorème d'orthonormalisation aux colonnes de M).

On dira que (K, D, T) est la décomposition d'Iwasawa de M ; on notera $t_{i,j}(\mathrm{M})$ les coefficients de T, et $d_i(\mathrm{M})$ les coefficients diagonaux de D.

2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ est l'ensemble des matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1.

On note $\mathscr{X}_n$ l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ et π_n la surjection canonique $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{X}_n$. Pour tout élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on notera [M] sa classe $\pi_n(\mathrm{M})$, c'est-à-dire le sous-ensemble $\mathrm{M} \cdot \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

3. Existe-t-il une structure de groupe sur $\mathscr{X}_n$ telle que π_n soit un morphisme de groupes ?

On rappelle qu'un sous-groupe Γ de $\mathbf{R}^n$ est un *réseau* s'il existe une base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que :

$$\Gamma = \{\, a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z} \}.$$

On dit que $\mathscr{C}$ est une *base* du réseau Γ. On note $\mathscr{R}_n$ l'ensemble des réseaux de $\mathbf{R}^n$.

4. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) &\to \mathscr{R}_n \\ \mathrm{M} &\mapsto \mathrm{M}(\mathbf{Z}^n) \end{aligned}$$

se factorise à travers π_n pour définir une bijection $\mathscr{X}_n \to \mathscr{R}_n$.

5. Montrer que l'application $\mathrm{M} \mapsto |\det(\mathrm{M})|$ définit par passage au quotient une application $v : \mathscr{R}_n \to \mathbf{R}$. Donner une interprétation géométrique de $v(\Gamma)$ pour un réseau Γ.

On pose $e = (1, 0, \ldots, 0)$. Soit $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'application $\mathrm{M} \mapsto \|\mathrm{M}(e)\|$, et soit $\mathcal{M}$ une classe dans $\mathscr{X}_n$.

6. Montrer que toute boule de $\mathbf{R}^n$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de Γ.

7. Montrer que φ atteint son minimum sur $\mathcal{M}$.

Une matrice M dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \min \varphi([\mathrm{M}])$, c'est-à-dire telle que $\varphi(\mathrm{M}) \leq \varphi(\mathrm{MA})$ pour tout A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, sera dite *minimale*.

8. Soient M une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et (K, D, T) sa décomposition d'Iwasawa. Exprimer $\varphi(\mathrm{M})$ en fonction des coefficients de D.

9. Si M est minimale, montrer l'inégalité $d_1(\mathrm{M}) \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}} d_2(\mathrm{M})$.

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbf{R})$ qui satisfont aux inégalités :

$$d_i(M) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} d_{i+1}(M) \quad \text{pour } 1 \leq i < n.$$

Le but des deux questions suivantes est de montrer par récurrence sur n l'égalité $\pi_n(\mathcal{T}_n) = \mathcal{X}_n$.

10. On suppose dans cette question $\pi_{n-1}(\mathcal{T}_{n-1}) = \mathcal{X}_{n-1}$. Soient M une matrice dans $GL_n(\mathbf{R})$ et (K, D, T) sa décomposition d'Iwasawa.

   a. Montrer qu'il existe une matrice A dans $GL_n(\mathbf{Z})$ telle que :

$$DTA = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 \dots b_n \\ 0 & \\ \vdots & M' \\ 0 & \end{pmatrix},$$

   où $b_2, \dots, b_n$ sont des réels, et où M' est dans $\mathcal{T}_{n-1}$.

   b. Exprimer la décomposition d'Iwasawa de MA à l'aide de celle de M'.

11. Montrer l'égalité $\pi_n(\mathcal{T}_n) = \mathcal{X}_n$.

12. On définit des applications $m : \mathcal{R}_n \to \mathbf{R}$ et $v : \mathcal{R}_n \to \mathbf{R}$ en posant, pour tout réseau Γ dans $\mathbf{R}^n$,

$$m(\Gamma) = \inf_{a \in \Gamma, a \neq 0} \|a\| \quad \text{et} \quad \gamma(\Gamma) = \frac{m(\Gamma)^2}{v(\Gamma)^{2/n}}.$$

   Montrer les inégalités :

$$0 < \gamma(\Gamma) \leq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

13. Calculer $m(\Gamma)$ et $\gamma(\Gamma)$ pour les réseaux suivants :

$$\mathbf{Z}^n \text{ dans } \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{Z}(1,0) \oplus \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ dans } \mathbf{R}^2.$$

14. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{T}_n$ qui satisfont aux inégalités $|t_{i,j}(M)| \leq \frac{1}{2}$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Montrer l'égalité $\pi_n(\mathcal{S}_n) = \mathcal{X}_n$.

PARTIE IV

On identifie $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{X}_n$ à l'aide de la bijection construite en (III.4.). On munit $\mathcal{R}_n$ de la topologie dont les ouverts sont les $\pi_n(U)$ où U est un ouvert de $GL_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que l'application π_n est continue et que $\mathcal{R}_n$ est séparé.

2. Montrer que l'application v définie en III.5. est continue.

3. Soit U une partie compacte de $GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|M(x)\| \geq c \, \|x\|,$$

   pour tout M dans U et tout x dans $\mathbf{R}^n$.

4. Montrer que les applications m et γ définies en III.12. sont continues.

5. Soit $\mathcal{Y}$ une partie fermée de l'ensemble $\mathcal{S}_n$ défini en III.14. Montrer que $\mathcal{Y}$ est compacte si et seulement s'il existe des réels strictement positifs α et β tels que $d_1(M) \geq \alpha$ et $d_n(M) \leq \beta$, pour tout élément M de $\mathcal{Y}$.

6. Soit $\mathcal{P}$ une partie fermée de $\mathcal{R}_n$. Montrer que $\mathcal{P}$ est compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

   (*i*) $v(\mathcal{P})$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$;

   (*ii*) il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que pour tout réseau Γ de $\mathcal{P}$, on ait $\Gamma \cap U = \{0\}$.

On note $\mathcal{R}'_n$ la partie fermée de $\mathcal{R}_n$ formée des réseaux Γ tels que $v(\Gamma) = 1$, et on note $\gamma' : \mathcal{R}'_n \to]0, +\infty[$ l'application induite par γ par restriction.

7. Montrer que γ et γ' ont même image.

8. Montrer que l'image réciproque par γ' d'un compact de $]0, +\infty[$ est compacte.

9. Montrer qu'il existe un réseau Γ dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\gamma(\Gamma) = \sup\limits_{\Gamma' \in \mathcal{R}_n} \gamma(\Gamma')$.

PARTIE V

Soit Γ un réseau ; on note $S(\Gamma)$ l'ensemble des $a \in \Gamma$ tels que $\|a\| = m(\Gamma)$ et B_Γ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques B sur $\mathbf{R}^n$ telles que $B(a, a) = 1$ pour tout $a \in S(\Gamma)$.

1. Exhiber un élément de B_Γ.

2. Montrer qu'il existe un réel $c(\Gamma) > 1$ ne dépendant que de Γ tel que :

$$\|M(y)\| \geq c(\Gamma) \frac{m(\Gamma)}{\|M^{-1}\|},$$

   pour tout M dans $GL_n(\mathbf{R})$ et tout y non nul dans $\Gamma - S(\Gamma)$.

3. Montrer l'existence d'un voisinage U de la matrice identité I_n dans $GL_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$S(M(\Gamma)) \subset M(S(\Gamma))$$

   pour tout $M \in U$.

Soient B et B' des éléments de B_Γ et soit M la matrice de $B - B'$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Soit α un réel ; on rappelle (et on admettra) que pour $|\alpha|$ assez petit, il existe une unique matrice définie positive M_α de carré $I_n + \alpha M$. De plus, $\lim\limits_{\alpha \to 0} M_\alpha = I_n$.

4. Montrer que pour $|\alpha|$ assez petit, on a $m(M_\alpha(\Gamma)) = m(\Gamma)$.

5. Donner un développement limité d'ordre 2 de la fonction $\alpha \mapsto \det(M_\alpha)$ au voisinage de 0. On suppose dans cette question seulement $\gamma(\Gamma) = \sup\limits_{\Gamma' \in \mathcal{R}_n} \gamma(\Gamma')$. Montrer que B_Γ a un seul élément.

6. On suppose dans cette question que B_Γ a un seul élément. Soit $\mathcal{B}$ une base de Γ.

   a. Soit B une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un système linéaire Σ dont le nombre d'équations est $\frac{1}{2}\operatorname{Card} S(\Gamma)$ tel que :

   B est dans B_Γ si et seulement si les $B(b, b')$, pour b, b' dans $\mathcal{B}$, sont solutions de Σ.

   b. Montrer que $S(\Gamma)$ a au moins $n(n+1)$ éléments.

   c. Exprimer le déterminant de la matrice $(\langle b, b' \rangle)_{b, b' \in \mathcal{B}}$ en fonction de Γ.

   d. En déduire que $\gamma(\Gamma)^n$ est rationnel.