Université Lille I **feuille de TD n° 7**
Master 2 recherche A. B. Tumpach

Revêtement universel

Dans cette feuille d'exercices nous allons construire le revêtement universel d'une variété M, et montrer qu'il y a une bijection entre les revêtements de M et les sous-groupes de $\pi_1(M)$.

Exercice 1 *(Construction du revêtement universel)*
Soient M une variété connexe réelle de dimension finie et m_0 un point de M. On appelle **chemin issu de** m_0 une application continue $\gamma\ : [0,1] \to M$ telle que $\gamma(0) = m_0$. On appelle **homotopie à extrémités fixes** entre deux chemins γ_1 et γ_2 issus de m_0 et ayant la même extrémité $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ une application continue $h\ : [0,1] \times [0,1] \to M$ telle que

$$\begin{cases} h(0,s) = \gamma_1(s), & \text{pour} \quad 0 \leq s \leq 1, \\ h(1,s) = \gamma_2(s), & \text{pour} \quad 0 \leq s \leq 1, \\ h(\cdot,0) = m_0, \\ h(\cdot,1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1). \end{cases}$$

On note $\widetilde{M}$ l'ensemble des classes d'équivalence de chemins issus de m_0 modulo homotopies à extrémités fixes. On rappelle que la composition de deux chemins γ et β tels que $\gamma(1) = \beta(0)$ est définie par

$$\gamma \star \beta(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & \text{pour} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s-1), & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

1. Etant donné un chemin γ issu de m_0 et un ouvert contractile $\mathcal{U}$ contenant $\gamma(1)$, on considère l'ensemble des chemins de la forme $\gamma \star \beta$, où β est un chemin contenu dans $\mathcal{U}$. Montrer que la classe modulo homotopie à extrémités fixes d'un tel chemin $\gamma \star \beta$ dépend uniquement de $[\gamma] \in \widetilde{M}$ et de $\beta(1)$.
2. On munit l'ensemble $\widetilde{M}$ de la topologie suivante. Une base d'ouverts de $\widetilde{M}$ est donnée par les ensembles
$$[\gamma] \star \mathcal{U} := \{[\gamma \star \beta], \quad \text{où} \quad \beta \quad \text{est un chemin contenu dans } \mathcal{U}\},$$
où $[\gamma] \in \widetilde{M}$ et où $\mathcal{U}$ parcourt une base de voisinages contractiles de $\gamma(1)$ dans M. Montrer que $\widetilde{M}$ muni de cette topologie est un espace séparé.
3. Montrer que M admet un atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tel que les ouverts $\mathcal{U}_\alpha$ sont contractiles.
4. Soit $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, et $m_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$. Pour toute classe d'homotopies à extrémités fixes de chemins de m_0 à m_α, on choisit un représentant $\gamma_{\alpha,i}$. Soit f l'application qui à une classe de chemins $[\gamma] \in \widetilde{M}$ associe le point d'arrivée $\gamma(1)$ commun à tous les chemins appartenant à $[\gamma]$. Montrer que $\mathcal{B} = \{([\gamma_{\alpha,i}] \star \mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha \circ f)\}$ est un atlas $\mathcal{C}^\infty$ de $\widetilde{M}$.
5. Soient $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ deux points de $\widetilde{M}$. En composant les applications $h_1(t,s) = \gamma_1(st)$ et $h_2(t,s) = \gamma_2(st)$, montrer que $\widetilde{M}$ est connexe par arcs.
6. On considère un lacet $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq 1}$ de $\widetilde{M}$ issu du chemin constant égal à m_0 : $\gamma_0(s) = \gamma_1(s) = m_0$ pour tout $s \in [0,1]$. En particulier $\gamma_t(0) = m_0$ pour tout $t \in [0,1]$. En considérant l'application
$$\begin{array}{rccc} \tilde{h}\ : & [0,1] \times [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & M \\ & (t,s,u) & \longmapsto & \gamma_t(us), \end{array}$$
montrer que $\widetilde{M}$ est simplement connexe.
7. Montrer que $f\ : \widetilde{M} \to M$ est un revêtement.

Exercice 2 *(Relèvement des applications)*
Soit $p : P \to N$ un revêtement d'une variété connexe N et M une variété réelle de dimension finie.

1. *(Relèvement des chemins)* Soit γ un chemin de N et $y_0 \in P$ tel que $p(y_0) = \gamma(0)$.
   (a) Montrer qu'il existe un recouvrement de $\gamma([0,1])$ par un nombre **fini** d'ouverts $\mathcal{V}_i$ de N tels que $p^{-1}(\mathcal{V}_i)$ soit une union disjointe d'ouverts $\mathcal{U}_{ij}$ de P tels que p réalise un difféomorphisme entre $\mathcal{U}_{ij}$ et $\mathcal{V}_i$.
   (b) En déduire qu'il existe $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ et des ouverts $\mathcal{W}_1, \cdots \mathcal{W}_n$ de N tels que $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \mathcal{W}_k$ et tels que $p^{-1}(\mathcal{W}_k)$ soit une union disjointe d'ouverts de P sur chacun desquels p réalise un difféomorphisme avec $\mathcal{W}_k$.
   (c) Soit $\mathcal{U}^1$ la composante connexe de $p^{-1}(\mathcal{W}_1)$ contenant y_0. Montrer que $\gamma_{|[t_0,t_1]}$ se relève en une unique application $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \to \mathcal{U}^1$.
   (d) Construire par récurrence un chemin $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
   (e) En utilisant la connexité de $[0,1]$, montrer que deux relèvements $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ de γ tels que $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = y_0$ coïncident.
2. *(Relèvement des homotopies)* Soient γ_1 et γ_2 deux chemins de P tels que $p \circ \gamma_1$ et $p \circ \gamma_2$ soient deux chemins de N reliés par une homotopie $h : [0,1] \times [0,1] \to N$, $h(0,\cdot) = \gamma_1(\cdot)$, $h(1,\cdot) = \gamma_2(\cdot)$.
   (a) Monter qu'il existe des subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ et $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ et des ouverts $\mathcal{V}_{ij}$ de N, où $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, tels que $h([t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]) \subset \mathcal{V}_{ij}$ et tels que $p^{-1}(\mathcal{V}_{ij})$ soit une union disjointe d'ouverts de P sur chacun desquels p réalise un difféomorphisme avec $\mathcal{V}_{ij}$.
   (b) En déduire qu'il existe une unique homotopie $\tilde{h}$ entre γ_1 et γ_2 telle que $p \circ \tilde{h} = h$.
3. *(Relèvement des applications $f : M \to N$)* Soient $m_0 \in M$, $y_0 \in P$, $x_0 \in N$ et $f : M \to N$ une application continue tels que $f(m_0) = x_0$ et $p(y_0) = x_0$.
   (a) Supposons qu'il existe deux applications $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ de M dans P telles que $p \circ \tilde{f}_i = f$ pour $i = 1, 2$ et $\tilde{f}_i(m_0) = y_0$. Montrer que si M est connexe, alors $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. (On pourra considérer l'ensemble des points où $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$).
   (b) Supposons que M est **simplement connexe**. Construire une application $\tilde{f} : M \to P$ telle que $\tilde{f}(m_0) = y_0$ et $p \circ \tilde{f} = f$. (Pour déterminer $\tilde{f}(m)$, on pourra considérer un chemin γ de M joignant m_0 à m ainsi que le relèvement de $f \circ \gamma$).

Exercice 3 Soit N une variété **simplement connexe** et $p : P \to N$ un revêtement de variétés de N.

1. Supposons que P soit connexe. Soit y_1 et y_2 deux points de P tels que $p(y_1) = p(y_2)$. En considérant un chemin de P joignant y_1 à y_2, montrer que $y_1 = y_2$. En déduire que p est une bijection entre P et N, et un difféomorphisme.
2. Montrer que si P n'est pas connexe, $p : P \to N$ est un revêtement trivial.

Exercice 4 *(Sous-groupes de $\pi_1(M)$)*
Soient M une variété connexe réelle de dimension finie, $m_0 \in M$ et G un sous-groupe de $\pi_1(M)$. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = m_0$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. On rappelle que γ_2^{-1} est défini comme le chemin $\gamma_2^{-1}(s) = \gamma_2(1-s)$. On dira que γ_1 et γ_2 sont G-équivalents (et on notera $\gamma_1 \sim_G \gamma_2$) si la classe modulo homotopie du lacet $\gamma_1 \star \gamma_2^{-1}$ appartient à G. On pose

$$M_G := \widetilde{M} / \sim_G .$$

1. Vérifier que $M_{\{1\}} = \widetilde{M}$.
2. Montrer que M_G est un revêtement de M.
3. Montrer que $\pi_1(M_G) = G$.
4. Soit N un revêtement de M. Montrer que $\pi_1(N)$ s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(M)$.
5. Soient N_1 et N_2 deux revêtements de M. Montrer qu'il existe un isomorphisme de revêtements entre N_1 et N_2 si et seulement si $\pi_1(N_1)$ et $\pi_1(N_2)$ s'identifient à deux sous-groupes conjugués de $\pi_1(M)$.