

# Contrôle 2 - Probabilités, Statistiques

## ENSAM 1A - PT

Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés. **Le barème est indicatif.**

### Exercice 1 (Statistiques, 4 pts)

On considère  $n$  variables aléatoires  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  indépendantes de même loi  $\Gamma(k, \theta)$  avec  $k$  est connu et  $\theta$  inconnu. La loi  $\Gamma(k, \theta)$  est une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité :

$$f(x; k, \theta) = f(x; \theta, k) = \frac{x^{k-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)}{(k-1)! \theta^k} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

1. Ecrire la vraisemblance des observations.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .
3. Si  $X$  suit une loi  $\Gamma(k, \theta)$ , l'espérance de  $X$  est  $\mathbb{E}(X) = k\theta$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  est-il sans biais ?
4. Cet estimateur est-il convergent ? (justifier)
5. On réalise des simulations et on obtient :

classes	$[0, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 4]$
Effectif	2	7	11	10

Tracer l'histogramme des observations.

6. Dessiner la fonction de répartition.
7. Calculer la médiane des observations.

### Exercice 2 (Arrêt de bus, 11 pts)

Un arrêt de bus est desservi à 8h, 8h30 et 9h (exactement). Un usager arrive à l'arrêt à un instant aléatoire uniformément réparti sur 8h-9h00. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au temps écoulé (en heures) depuis 8h lorsque l'usager arrive.  $X$  suit donc une loi uniforme  $\mathcal{U}([0, 1])$ .

On note  $T$  le temps d'attente avant que le bus n'arrive.

1. Rappeler la densité et la fonction de répartition de  $X$ .
2. Avec quelle probabilité l'usager attend-t-il le bus moins de 15 minutes ? plus de 20 minutes ?
3. Ecrire le temps d'attente  $T$  en fonction de  $X$ .
4. En déduire l'espérance du temps d'attente  $T$  (indication : on doit se ramener au calcul de deux intégrales). Commenter.
5. On suppose maintenant que le bus passe exactement à 8h, 8h45 et 9h. Refaire les questions 3) et 4) dans ce cas. Commenter en comparant à la question 4).