

Contrôle 2 - Probabilité

Arts et Métiers Paristech 1A - ST

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Estimation d'une précision)

Partie 1 Pour contrôler un procédé de fabrication de clous, on mesure $n = 200$ clous choisis au hasard. Chacun des clous est censé mesurer 3 cm. Les tailles relevées sont X_1, \dots, X_n , que l'on suppose i.i.d. de loi $\mathcal{N}(3, V)$. On rappelle que la densité de cette loi normale est :

$$f(x; V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2V}\right).$$

La variance V nous donne une indication sur la précision de la machine qui fabrique les clous et nous souhaitons l'estimer à partir des n observations.

1. Ecrire la vraisemblance des observations.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de V .
3. Cet estimateur est-il convergent ?
4. Cet estimateur est-il biaisé ?

Partie 2 La mesure des n clous a donné les résultats suivants :

X	[2.5,2.85[[2.85,3[[3,3.1[[3.1,3.4[
Effectif	12	89	67	32

5. Dessiner l'histogramme correspondant.
6. Tracer la fonction de repartition de X .
7. Calculer les premier et troisième quartiles par interpolation.

Exercice 2 (Le triste destin des souris testeuses)

Une expérience a été menée dans le but de mettre en évidence un éventuel effet de la fumée de papier à cigarette sur la genèse du cancer du poumon. Au cours de cette expérience, 74 souris ont été utilisées : 38 sont placées dans une cage enfumée par une machine à fumer, 36 servent de témoin et sont placées dans une cage séparée et non enfumée. La machine a produit la fumée de 108 papiers à cigarette par jour, six jours par semaine et cela pendant un an. A la fin de l'expérience, les animaux sont sacrifiés et on compte 13 tumeurs parmi les souris expérimentales et 11 parmi les témoins.

1. Donner le tableau de contingence croisant en ligne le type de cage de la souris (enfumée ou témoin) et en colonne son état (absence ou présence d'une tumeur).
2. Calculer les distributions marginales.
3. On réalise un test du χ^2 pour voir s'il existe un lien statistique entre la genèse des tumeurs et la présence de la fumée de papier à cigarette.
 - 3.1. Quelle sont l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative du test ?
 - 3.2. Donner et calculer la statistique du test du χ^2 .
 - 3.3. A quelle valeur faut-il comparer la statistique calculée en question 3.2 ?On donne les quantiles d'ordre α suivants pour la loi du χ^2 à k degrés de liberté :

$$q(\alpha=0.05, k=1)=0.0039$$

$$q(\alpha=0.95, k=1)=3.8415$$

$$q(\alpha=0.975, k=1)= 5.0239$$

$$q(\alpha=0.025, k=1)= 0.0010$$

$$q(\alpha=0.05, k=4)=0.7107$$

$$q(\alpha=0.95, k=4)=9.4877$$

$$q(\alpha=0.975, k=4)=11.1432$$

$$q(\alpha=0.025, k=4)=0.4844$$

- 3.4. Quelle est la conclusion ?