

# Test 1 - Probabilités, Statistiques

## Arts et Métiers ParisTech 1A - SI

Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés. **Le barème est indicatif.**

### Exercice 1 (QCM, 5 pts)

Une bonne réponse donne 1 point, une mauvaise en enlève 0,5.

1. La variance d'une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  est  $(1-p)/p^2$ .
2. Si  $\mu(dx) = \sum_{i=1}^{+\infty} (1/2^i) \delta_{1/2^i}(dx)$  alors  $\mu$  est une mesure de probabilité d'espérance  $1/3$ .
3. Soit  $B \subset [0, 1]$ . La famille  $\mathcal{A} = \{\emptyset, [0, 1], B, [0, 1] \setminus B\}$  est une tribu sur  $[0, 1]$ .
4. Mon voisin a une fille. La probabilité que l'autre soit un garçon est  $2/3$ .
5. Deux variables indépendantes peuvent avoir la même loi.

### Exercice 2 (Compagnie d'assurance, 8 pts)

Une compagnie d'assurance répartit ses 1000 clients en 3 classes : "bas risque", "risque moyen", "haut risque". Pour chacune de ces catégories, la probabilité d'avoir au moins un accident au cours de l'année est 0,05, 0,15 et 0,30. Les parts de ces classes dans la population sont  $p_1 = 20\%$ ,  $p_2 = 50\%$ ,  $p_3 = 30\%$ .

1. Quelle est l'espérance du nombre de clients ayant un accident ou plus au cours d'une année donnée ?
2. Si un client n'a pas eu d'accident une année donnée, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque ?
3. A chaque fois qu'un accident survient, la compagnie verse 100 euros à son client. Le prix de la souscription est  $x$  pour les clients "bas risque",  $1,5x$  pour les clients "risque moyen" et  $2x$  pour les clients "haut risque". Quelle doit être la valeur de  $x$  pour qu'en moyenne les souscriptions compensent les remboursements ?

### Exercice 3 (Urne à trois boules, 7 points)

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant une boule rouge, une boule noire et une boule blanche, jusqu'à obtenir la boule blanche. Soit  $X$  le nombre de tirages effectués, et  $Y$  le nombre de fois que la boule rouge a été tirée.

1. Quelle est la loi de  $X$  ?
2. Recalculer son espérance.
3. Conditionnellement à l'événement  $X = k$  (avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ) quelles valeurs peut prendre  $Y$  ?
4. Calculer  $\mathbb{P}(Y = n | X = k)$  pour les valeurs de  $n$  admissibles. Quelle loi reconnaît-on ?