Contrôle 1 - Probabilité
Arts et Métiers Paristech 1A - ST

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Vrai/faux, 6 pts)
Répondre par vrai ou faux et corriger lorsque l'affirmation est fausse.

1. Il existe 12 codes de 4 chiffres pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. Si $\mu(dx) = \exp(-(x-m)^2/2)/\sqrt{2\pi}\, dx + \delta_m(dx)$, alors $\int_{\mathbb{R}} x\, dx = 2m$.
3. Si $\Omega = \{0, 1\}$, alors $\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ est une tribu.
4. On a un dé non truqué. Le nombre de lancers à effectuer pour obtenir le chiffre "1" est une loi Binomiale $\mathcal{B}(6, 1/6)$.
5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 1/n)$. Cette suite converge en probabilité vers 0.
6. La variance d'une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est λ^2.

Exercice 2 (Saut en hauteur, 6 pts)
Renaud L. tente, au saut en hauteur, de franchir successivement les paliers 1, 2, 3, $\ldots, n$, etc. On suppose les sauts indépendants et on suppose que la probabilité de succès à la hauteur n est égale à $1/n$, ($n \in \mathbb{N}^*$). On note X la dernière hauteur franchie.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Quelle est la probabilité pour que le premier palier soit franchi ? le second ?
3. Calculer la probabilité que la dernière hauteur franchie soit $X = n$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = n)$.
4. Vérifier que la loi de X est bien une loi de probabilité (on pourra utiliser $n = (n+1) - 1$).
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 (Chaîne de fabrication, 8 pts)
Une usine fabrique des cadres de vélo. La fabrication de chaque pièce s'effectue en deux étapes : passage par une chaîne A puis par une chaîne B. Le temps passé pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire T_1 de loi exponentielle de paramètre 2. Le temps de passage sur la chaîne B est une variable aléatoire T_2 de loi uniforme sur $[0, 1]$. Les variables T_1 et T_2 sont indépendantes.

1. On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce. Exprimer S en fonction de T_1 et de T_2.
2. Déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce, ainsi que la variance de ce temps de fabrication.
3. La fabrication de la première pièce commence au temps $t = 0$. Un contrôleur arrive au temps $t = 2$. Quelle est la probabilité pour que la pièce soit toujours dans la chaîne A ?
4. On admet que la densité de S est donnée par :

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(u) \times 2e^{-2(t-u)} \mathbf{1}_{t-u>0} du.$$

En effet, c'est la somme pour tous les temps u possibles des probabilités que $T_1 = t - u$ et $T_2 = u$. Calculer $g(t)$ en différenciant les cas $t \leq 1$ et $t > 1$.
5. Lorsque le contrôleur arrive, la première pièce n'est plus dans la chaîne A. Sachant cela, quelle est la probabilité pour que la pièce soit terminée ?