

# Rattrapage - Probabilité Statistique

## ENSAM 1A - 2 septembre 2009

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

### Exercice 1 (Variable aléatoire à densité)

Une variable aléatoire  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  suivante :

$$f(x) = 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $X$ . On rappelle que  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ .
3. En utilisant cette fonction de répartition, évaluer les probabilités  $P(X \leq 1/2)$ ,  $P(1/3 < X \leq 2/3)$ .
4. Calculer l'espérance de  $X$ . Pouvait-on s'y attendre ?
5. Calculer la variance de  $X$ .

### Exercice 2 (Ivresse au volant)

Un conducteur sobre a une chance sur 1000 d'avoir un accident de voiture au cours d'une période. Un conducteur ivre a une chance sur 50 d'avoir un accident au cours de la même période. On admet qu'un conducteur sur 100 conduit en état d'ivresse.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un accident et que le conducteur soit ivre ?
2. Lorsqu'il y a un accident, quelle est la probabilité pour que le conducteur soit ivre ?

### Exercice 3 (Maximum de vraisemblance)

On considère un échantillon  $(X_i)_{i=1..n}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$  où  $\mu \in \mathbb{R}$  est l'espérance inconnue qu'on va chercher à estimer. On rappelle que la densité de cette loi normale est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right).$$

1. Ecrire la log-vraisemblance des observations.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu$ .
3. Comment cet estimateur se comporte-t-il lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ?