Rattrapage - Proba-Stat - Arts et Métiers Paristech 1A

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Taches solaires, 9 points)
Les astronomes ont remarqué très tôt (depuis au moins 2000 ans) des taches sombres sur la surface du soleil (attention, il ne faut jamais regarder directement le soleil sans lunette adaptée !). Elles correspondent à des zones moins chaudes et sont des manifestations de l'activité solaire, dues à des variations de champ magnétique à la surface de celui-ci. Une tache peut avoir une durée de vie de quelques semaines.

Nous disposons d'un relevé du nombre mensuel moyen de taches solaires entre 1749 et 1983, soit 2820 observations (les données entre 1749 et 1960 ont été collectées par l'Observatoire Fédéral Suisse de Zurich, et celles après 1960, par l'Observatoire Astronomique de Tokyo). L'échantillon est noté $(x_t)_{t\in\{1,\dots T\}}$, où $T = 2820$. Nous considérerons dans cet exercice qu'il s'agit de réalisations indépendantes de variables aléatoires de même loi, et nous noterons X une variable aléatoire ayant cette loi.

1. Au vu de la Figure 1 (a), pourquoi l'hypothèse d'indépendance des observations est-elle criticable ? Quelle caractéristique des données ne prend-on pas en compte dans cet exercice ?

(a) (b)

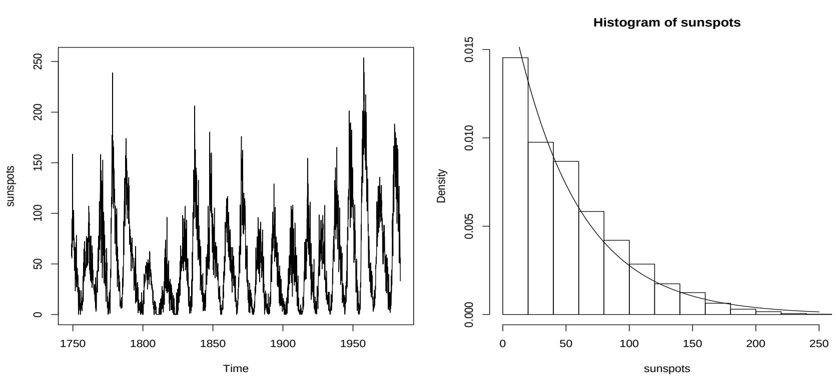

FIG. 1 – *(a) Variation du nombre mensuel moyen de taches solaires entre 1749 et 1983 ; (b) histogramme de la variable "nombre mensuel moyen de taches solaires".*

2. L'histogramme des observations est présenté à la Figure 1 (b), et nous y avons superposé la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ (qu'on déterminera dans la suite de l'exercice) :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{t>0}.$$

Est-il raisonnable de choisir pour la loi de X une loi exponentielle ?

3. Recalculer l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ.

4. Donner un intervalle de confiance à 95% pour l'espérance calculée en question 3). On donne la moyenne des observations $\bar{x} = 51,27$, et leur variance $\sigma_x^2 = 1887,81$. Faire l'application numérique.

5. Ecrire la vraisemblance des observations $(x_t)_{t\in\{1,\dots,T\}}$.

6. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}_T$ de λ. Faire l'application numérique avec les valeurs de la question **4**.

7. Justifier que $\widehat{\lambda}_T$ est un estimateur convergent de λ.

8. Calculer $\mathbb{P}(X > t)$ en fonction de λ et t.

9. En utilisant la valeur estimée de λ, donner une approximation de la probabilité que le nombre de taches solaires observé dépasse 300 (valeur non observée sur les données pour lesquelles le maximum est 253,8). On obtient ainsi une estimation d'un événement très rare...

Exercice 2 (Roland-Garros, 5 points)
Rafael et Roger s'affrontent à Roland-Garros. A chaque manche, Rafael gagne avec une probabilité p. La partie se déroule en trois manches gagnantes (le premier à remporter trois manches gagne, la partie se fait donc en trois, quatre ou cinq manches). On définit, pour chacune des 5 manches possibles, une variable X_i ($i \in \{1, 2, \dots, 5\}$) qui vaut 1 si Rafael gagne et 0 sinon. On note Y le nombre de manches jouées et Z le nombre de manches gagnées par Rafael.

1. Quelle est la loi de X_1 ?

2. Montrer que la probabilité que Rafael gagne en 5 manches est $\mathbb{P}(\{Y = 5\} \cap \{Z = 3\}) = 6\ p^3(1-p)^2$.

3. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ? Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{3, 4, 5\}$.

4. Quelle est la probabilité que Rafael gagne sachant que le match s'est déroulé en 5 manches ? Est-ce naturel ?

5. Connaissant le nombre de manches jouées Y, justifier que Z suit une loi Binomiale $B(Y, p)$.