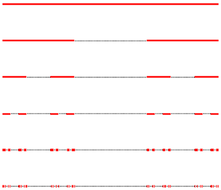
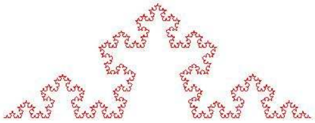
Exemples d'ensembles

December 16, 2009

Ensemble de Cantor et Flocon de Koch





L'ensemble de Cantor s'écrit

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \quad \text{avec} \quad A_0 = [0, 1], \quad A_{n+1} = \frac{A_n}{3} \cup \frac{2 + A_n}{3}$$

K est Borélien.
La mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor est 0 (la mesure de A_n est $(2/3)^n$)

Le flocon de Koch est un ensemble mesurable de longueur infinie (on multiplie la longueur par $4/3$ à chaque itération).

Exemple d'un ensemble non Borélien

⋆ On considère la relation binaire sur $[0, 1[$ définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $[0, 1[$ qui partitionne cet intervalle en classes d'equivalence (sous-ensembles où tous les éléments sont équivalents au sens $\sim$).

On note $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble de ses classes (on peut montrer que I nest pas dénombrable).

⋆ En utilisant l'axiome du choix, on peut choisir dans chaque classe un élément x_i et on note $B = \{x_i,\ i \in I\}$ (le fait que I soit non dénombrable implique que l'on doive passer par l'axiome du choix).

⋆ Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une numérotation des rationnels de $]-1, 1[$.

Exemple d'un ensemble non Borélien (suite)

$\star$ On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = B + r(n)$.

Les ensembles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et

$$[0,1[\subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset]-1,2].$$

Si B était mesurable, on pourrait définir sa mesure $\lambda(B)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(B_n) = \lambda(B)$. Mais alors :

$$1 = \lambda([0,1[) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B) \leq \lambda = (]-1,2]) = 3.$$

La première inégalité interdit $\lambda(B) = 0$ tandis que la seconde interdit $\lambda(B) > 0$.

Absurde !