Examen de Statistique - M1 IM - vendredi 9 novembre 2012

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 2h.

Exercice 1 (Loi uniforme)
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. On considère n variables i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de loi uniforme sur $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$.

1. Ecrire le modèle statistique.
2. Ecrire la vraisemblance du modèle. Ce modèle est-il exponentiel ?
3. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Cette statistique est-elle sans biais ? Quelle est sa variance ?
4. On définit $S_n = \max\{X_1, \dots X_n\}$ et $T_n = \min\{X_1, \dots X_n\}$. La statistique (S, T) est-elle exhaustive ?
5. Définir un estimateur U fonction de (S_n, T_n) qui soit sans biais et de variance plus petite que celle de $\bar{X}_n$ (cette question se fait sans calcul).
6. Justifier, en passant par les fonctions de répartition, que les densités de S_n et T_n sont :

$$f_{S_n}(s) = n\Big(s - \theta + \frac{1}{2}\Big)^{n-1} \mathbf{1}_{[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]}(s) \qquad \text{et} \qquad f_{T_n}(t) = n\Big(\theta + \frac{1}{2} - t\Big)^{n-1} \mathbf{1}_{[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]}(t).$$

7. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(T_n)$ et en déduire que la statistique (S_n, T_n) n'est pas complète. Est-on dans le cadre d'application du théorème de Lehmann-Scheffé ?

Exercice 2 (Loi exponentielle)
Soit $(X_1, \dots X_n)$ un échantillon de n observations indépendantes de loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ avec $\theta > 0$.
1. Ecrire le modèle statistique. Est-il exponentiel ?
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ ?
3. Cette statistique est-elle exhaustive et complète ?
4. Calculer l'information de Fisher du modèle.
5. $\widehat{\theta}_n$ est-elle une statistique efficace ?
6. Construire un intervalle de confiance à 95% pour θ.

Exercice 3 (Loi de Pareto)
Soit $(X_1, \dots X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d. de loi de Pareto de densité

$$f(x, \theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbf{1}_{x \geq \theta}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.
1. Ecrire le modèle statistique. Ce modèle est-il exponentiel ?
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
3. Déterminer la fonction de répartition de $\widehat{\theta}_n$.
4. En déduire que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ.