

Contrôle - Probabilité - ENSAM 1A - PT

Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés. **Le barème est indicatif.**

Exercice 1 (Vrai ou faux, 5 pts)

Toute bonne réponse vaut 1 point, toute mauvaise réponse enlève 0,5 point.

1. Il existe 21 façon de répartir 5 tableaux parmi 3 écoles.
2. La fonction de répartition d'une loi binomiale est une fonction en escaliers.
3. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où X_n suit une Bernoulli $\mathcal{B}(1, 1/n)$ converge en probabilité vers 0.
4. $\text{Cov}(X, -X) = -\text{Var}(X) < 0$.
5. $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \delta_0(dx) = 0$.

Exercice 2 (Calcul d'espérance et de variance, 6 points)

Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilité, respectivement, $p/2$, $1 - p$ et $p/2$. Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre X^a ? (discuter en fonction de a)
2. Pour chacune des valeurs k de la réponse précédente, calculer $\mathbb{P}(X^a = k)$. (en fonction de a)
3. Calculer $\mathbb{E}(X^a)$ quand a est pair, puis quand a est impair.
4. En déduire $\text{Var}(X^a)$.

Exercice 3 (Autour de la loi géométrique, 9 pts)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Soit X une variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle que pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

1. Que peut modéliser par exemple une loi géométrique?
2. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k)$.
3. Nous cherchons maintenant à montrer la réciproque de la question 2. Soit X une variable aléatoire pouvant prendre comme valeurs des entiers $k \in \mathbb{N}^*$, telle que $\mathbb{P}(X = 1) = p$ avec $p \in]0, 1[$ et telle que pour tout entier $k \geq 0$, $\mathbb{P}(X = 1 + k | X > 1) = \mathbb{P}(X = k)$.
 - 3.a. Comment s'appelle cette propriété?
 - 3.b. Calculer $\mathbb{P}(X = 1 + k)$ en fonction de p et $\mathbb{P}(X = k)$.
 - 3.c. En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre p .