

Contrôle - Probabilité

ENSAM 1A - PT

Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Vrai ou faux, 6 pts)

Toute bonne réponse vaut 1 point, toute mauvaise réponse enlève 0,5 point.

1. Le nombre d'entiers formés de 3 chiffres distincts et non nuls est 504.
2. Si $\mu(dx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\pi n}(dx)$, alors $\int_{\mathbb{R}} \sin(x) \mu(dx) = 0$.
3. Il y a 3240 façons de désigner deux délégués parmi les 81 étudiants d'une promo.
4. Si F est une fonction de répartition, F est continue.
5. L'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p = 0.5$ est 1.
6. Si un ensemble A est mesurable, son complémentaire A^c est mesurable.

Exercice 2 (Fraudeur, 6 pts)

Arsène décide de ne plus acheter sa carte Transpole et de voyager par les transports en commun sans ticket. On suppose qu'il effectue $2N$ voyages (N allers et N retours) dans le mois et que la probabilité qu'il soit contrôlé au cours d'un voyage est p . On note X le nombre de contrôles au cours du mois.

1. Quelle est la loi de X ? Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

La carte Transpole coûte c euros par mois et le montant d'une amende est de a euros. Soit Y la variable aléatoire représentant l'écart entre la somme dépensée en achetant une carte orange et la somme dépensée en payant les amendes.

3. Exprimer Y en fonction de X , c et a .
4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$. Commenter en fonction des valeurs de a et c .

Exercice 3 (Rhume, 8 pts)

On suppose que le nombre de rhumes X attrapés en un an par un individu est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. On rappelle que dans ce cas :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Un médicament préventif réduit ce paramètre à $\lambda' = 3$ lorsqu'il fait effet. La probabilité que le médicament fasse effet est $p = 0,75$. Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le médicament est

efficace, 0 sinon.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ? Quelle est la loi de Y ?
2. Donner $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$.
3. Tracer la fonction de répartition de Y .

Stéphanie essaie ce médicament et attrape 2 rhumes dans l'année. On note :

$$A = \{\text{Stéphanie attrape 2 rhumes}\}$$

$$B = \{\text{Le médicament est efficace}\}.$$

4. Lorsque le médicament est efficace, quelle est la loi de X ? En déduire la probabilité $\mathbb{P}(A|B)$?
5. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$?
6. Quelle est la probabilité pour que le médicament ait été efficace sur Stéphanie sachant qu'elle a eu 2 rhumes ?