Contrôle - Probabilité
ENSAM 1A - PSI

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Vrai/faux, 6 pts)
Toute bonne réponse vaut 1 point, toute mauvaise réponse enlève 0,5 point.

1. $\sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-x)\delta_{i\ln(2)}(dx) = 2$

2. $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[n,+\infty[}(x)\exp(\sin(x))dx = 0$.

3. Si $\Omega = \mathbb{R}$, $\{\Omega, \emptyset, [0,1],]-\infty, 0[,]1,+\infty[\}$ est une tribu.

4. Pour toute mesure μ, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(x)\mu(dx)$ est continue.

5. Deux événements A et B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

6. L'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli est $p(1-p)$.

Exercice 2 (Variable aléatoire de Poisson, 4 pts)
Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(1/(1+X))$.

Exercice 3 (Boules noires et blanches, 10 pts)
A. Questions préliminaires :

1. Prouver que pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![1,m]\!]$, $nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Prouver par récurrence sur N que pour tout $N \geq n$, $\sum_{m=n}^{N} C_m^n = C_{N+1}^{n+1}$.

B. Problème :

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules, les unes après les autres, sans remise. Quel est l'ensemble des possibles Ω ? Quel est son cardinal ?

4. Soit X la variable aléatoire décrivant le nombre de tirages nécessaires pour que toutes les boules noires soient tirées. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

5. Calculer $P(X = m)$ pour m une valeur que peut prendre X.

6. Calculer l'espérance de X.