# Examen de Probabilité et Modèles aléatoires - M1 IM - mardi 5 novembre 2014

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 2h.

Dans tout le sujet, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies les variables aléatoires.

**Exercice 1 (extrait du Partiel 2012)**
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \min\{|X_1|, \ \dots \ , |X_n|\}$.

**1.** Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T_n > \varepsilon)$ en fonction de $\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon)$ et en déduire que $T_n$ converge vers 0 en probabilité quand $n \to +\infty$.

**2.** La convergence est-elle presque-sûre ?

**Exercice 2 (Vecteur gaussien)**
Soit $X$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, centré et de matrice de variance-covariance $\Sigma$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{P}(X \in F) \in \{0,1\}$.

**1.** Soient $X_1$ et $X_2$ deux vecteurs gaussiens indépendants de même loi que $X$. Pour $\theta \in [0, \pi/2[$, on introduit

$$A(\theta) = \big\{\omega \in \Omega, \quad \cos(\theta)\ X_1(\omega) + \sin(\theta)\ X_2(\omega) \in F \text{ et } \ \sin(\theta)\ X_1(\omega) - \cos(\theta)\ X_2(\omega) \notin F\big\}.$$

Montrer que pour $\theta \neq \theta'$ dans $[0, \pi/2[$, $A(\theta) \cap A(\theta') = \emptyset$. *Indication : on pourra chercher à résoudre un système de deux équations à deux inconnues pour répondre à la question.*

**2.** Montrer que pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2 \\ \sin(\theta)X_1 - \cos(\theta)X_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \end{pmatrix}$$

ont même loi, et identifier cette loi.

**3.** En déduire que pour tout $\theta$, $\mathbb{P}(A(\theta)) = \mathbb{P}(A(0))$.

**4.** Montrer que $P(A(0)) = 0$ et en déduire que $\mathbb{P}(X \in F) = 0$ ou 1.

**Exercice 3 (Convergences)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = \frac{1}{2}.$$

T.S.V.P.

**1.** Calculer l'espérance et la variance de $X_n$.

**2.** Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \neq 0$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger en probabilité. Montrer par contre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi, vers une distribution que l'on précisera.

**3.** Que peut-on dire si la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\ell = 0$ ?

**4.** On suppose maintenant que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la série $\sum a_n^2$ diverge. On pose $\phi(n) = \sum_{k=1}^n a_k^2$. Montrer que $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\phi(n)}}$ converge en loi. Déterminer la loi limite.