Partiel de Probabilité et Modèles aléatoires - M1 IM - jeudi 7 novembre 2013

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 2h.

Exercice 1 (Espérance conditionnelle)
Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{1}{2} x\ e^{-x} \mathbf{1}_{x>0} \mathbf{1}_{0<y<x}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que X et Y/X sont indépendantes et donner les lois marginales de X et Y.

3. Quelle est la loi de Y conditionnellement à $X = x$, pour $x > 0$?

4. Soit U une variable aléatoire de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $p \in]0, 1[$ telle que U soit indépendante du couple (X, Y). On pose $Z = UX + (1 - U)Y$. Quelle est l'espérance de Z sachant X ?

Exercice 2 (Convergences)
Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X_1.

2. En déduire la fonction caractéristique de

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{1}{\lambda}).$$

3. Qu'en déduire ? On admettra que pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Exercice 3 (Vecteurs gaussiens)
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la loi de $X + 2Y$?

2. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X+Y,Z)$?

3. Peut-on trouver une combinaison linéaire $aX+bY+cZ$ qui soit nulle presque-sûrement, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$? Qu'est-ce que cela signifie pour Σ ? Que peut-on en déduire sur le support de la loi de (X,Y,Z) ?

4. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $X+\alpha Y$ soit indépendant de X.

5. En déduire $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

Exercice 4 (Polynômes d'approximation de Bernstein)
Pour $n\geq 1$ et $x\in[0,1]$, soient $X_1,\dots X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli $\mathcal{B}(1,x)$ indépendantes, et soit $S_{n,x}=\sum_{i=1}^n X_i$. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. Quelle est la loi de $S_{n,x}$?

2. Montrer que pour tout $\eta>0$, on a :

$$\Big|\mathbb{E}\Big(f\big(\frac{S_{n,x}}{n}\big)-f(x)\Big)\Big| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\Big(\big|\frac{S_{n,x}}{n}-x\big|>\eta\Big)+\sup_{|y-z|\leq\eta}\big|f(y)-f(z)\big|.$$

3. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\Big(f\big(\frac{S_{n,x}}{n}\big)\Big)=f(x)$$

et que cette convergence est uniforme en $x\in[0,1]$.

4. En déduire un polynôme (en x) qui approche uniformément f sur $[0,1]$.