# Examen de Probabilité et Modèles aléatoires - M1 IM - mardi 6 novembre 2012

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 2h.

**Exercice 1 (Convergences)**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n=\min\{|X_1|,\dots|X_n|\}$.

**1.** Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})=e^{\lambda^2\sigma^2/2}$.
**2.** Exprimer la probabilite $\mathbb{P}(T_n>\varepsilon)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_1>\varepsilon)$. En déduire que $T_n$ converge vers 0 en probabilité lorsque $n\to+\infty$.
**3.** La convergence est-elle presque sûre ? Si oui, prouver cette convergence p.s.
**4.** Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $Z_n=n^\alpha T_n$ converge en loi, et déterminer la loi limite.

**Exercice 2 (Vecteurs gaussiens)**
Soit $(X_1,X_2)$ un vecteur gaussien centré dans $\mathbb{R}^2$ et de matrice de variance-covariance

$$\Gamma=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}.$$

**1.** Donner la densité du vecteur $(X_1,X_2)$.
**2.** Considérons la variable aléatoire réelle $Y=X_2-aX_1$, où $a$ est un réel quelconque. Quelle est la loi du couple $(X_1,Y)$ ? On notera $\Sigma$ sa matrice de variance-covariance.
**3.** A quelle condition sur $a$ les variables $X_1$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
**4.** Pour quelle valeur de $a$ la variance de $Y$ est-elle minimale ? On notera cette valeur $a_0$ dans la suite de l'exercice.
**5.** On pose $\varepsilon=X_2-a_0X_1$. Montrez que $\mathbb{E}(\varepsilon)=\mathbb{E}(\varepsilon X_1)=0$.
**6.** En déduire $\mathbb{E}(X_2\,|\,X_1)$.

**Exercice 3 (Non réponse dans les sondages)**
On a interrogé une personne sur son revenu $Y$ qui est une variable de carré intégrable telle que $\mathbb{E}(Y_1)=m$ et que $\mathrm{Var}(Y_1)=\sigma^2$. La personne peut refuser de répondre et on dispose d'une variable indicatrice $X$ de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ telle que $X=1$ si l'individu a répondu et 0 sinon. On note $\rho=\mathrm{Cov}(X,Y)$.

**1.** On a $\mathbb{E}(Y\,|\,X)=a+bX=:Z$, justifier pourquoi (on remarquera que $X$ est une variable de Bernoulli).
**2.** En calculant $E(Z)$ et $E(ZX)$, trouver les coefficients $a$ et $b$ en fonction de $m$, $\sigma^2$, $p$ et $\rho$ tels que $Z$ soit l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y\,|\,X)$.
**3.** Calculer $m_0=\mathbb{E}(Y\,|\,X=0)$ et $m_1=\mathbb{E}(Y\,|\,X=1)$ en fonction de $m$, $p$ et $\rho$. Commenter sur la possiblité d'estimer le revenu à partir des observations où $X=1$.