Fiche 1 - AD - M1 MAS

Tran Viet Chi, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`, bureau 316 (bâtiment M3).

1 Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 1 (Projections)
1. Soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On considère la droite $\Delta = \text{Vect}(u)$. Ecrire la projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur Δ.

2. On considère $X \in \mathcal{M}_{n\times d}$ avec $d \leq n$, et on note $X_1, \dots X_d \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de la matrice X. Ecrire la projection du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sur l'espace $H = \text{Vect}(X_1, \dots X_d)$ engendré par les colonnes de X.

3. Ecrire la matrice de projection orthogonale sur H.
Application : écrire cette matrice de projection pour

$$H = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)?$$

4. On considère un vecteur gaussien X de $\mathbb{R}^3$ d'espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Var}(X) = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la loi de sa projection sur H donné à la question **3.** ?

5. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice Σ de la question précédente. Quelles sont les lois des projections de X sur chacun des vecteurs propres ?

6. Quelle est la droite sur laquelle il faut projecter X pour obtenir la distance $X - \widehat{X}$ la plus petite, où $\widehat{X}$ est le projeté orthogonal sur cette droite ? Que peut-on dire de la projection ?

7. Généraliser au cas où on projette X sur un sous-espace H de dimension $d \leq n$.

Exercice 2 (Lemme utile d'algèbre linéaire)
Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{p\times q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q\times p}$ telles que AB et BA soient diagonalisables.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles, avec les mêmes ordres de multiplicité.

2. En déduire que $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA) \leq \min(p, q)$ et que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

3. Montrer que si u est un vecteur propre normé de $A{}^tA$ relatif à la valeur propre λ, alors $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^tAu$ est un vecteur propre normé de ${}^tAA$ relatif à λ. Montrer que dans ce cas, on a $\text{rang}({}^tAA) = \text{rang}(A\,{}^tA) = \text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA)$.

2 Vecteurs aléatoires

Exercice 3 (Fonctions caractéristiques pour des vecteurs gaussiens)
1. Expliciter la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et en déduire $E(X^k)$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, de matrice de variance-covariance V et d'espérance m. A quels espaces appartiennent V et m ? Quelle est la fonction caractéristique de Y ?

Exercice 4 (Vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$)
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ d'espérance $m = (1, 1, 0)'$ et de variance

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le noyau de V ? En déduire que presque-sûrement $X_2 - X_3 = 1$.
2. Le vecteur $(X_1, X_2)'$ admet-il une densité dans $\mathbb{R}^2$? Si oui, laquelle ?
3. Quel est le support dans $\mathbb{R}^3$ de la loi de X ?

Exercice 5 (Transformations de vecteurs gaussiens)
1. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, centré et de matrice de variance $\sigma^2\text{Id}$. Soit A une matrice orthogonale. Quelle est la loi de AY ?

2. Soit $Y = (Y_1, \ldots Y_n)'$ un vecteur gaussien centré de dimension n et de matrice de variance est diagonale par blocs :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_k \end{pmatrix}$$

où V_i est carrée de dimension ℓ_i avec $\ell_1 + \ldots \ell_k = n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que les vecteurs $Z_1 = (Y_1, \ldots Y_{\ell_1})'$, ..., $Z_k = (Y_{\ell_1 + \cdots + \ell_{k-1}+1}, \ldots Y_{\ell_k})'$ sont indépendants.

Exercice 6 (Indépendance)
Soit X un vecteur aléatoire de dimension d de carré intégrable et de matrice de variance K. Soient T_1 et T_2 deux applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ respectivement.

1. Quelle est la matrice de variance du vecteur

$$\begin{pmatrix} T_1 X \\ T_2 X \end{pmatrix} ?$$

2. Si X est gaussien, montrer que $T_1 X$ et $T_2 X$ sont indépendants ssi $T_1 K T_2' = 0$.

Exercice 7 (Corrélation)
Soit $(X, Y)'$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$ centré et de variance

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où $\rho \in [0, 1]$. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont deux v.a. gaussiennes indépendantes.