Exo M2 recherche - Lille 1

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
page web : http://math.univ-lille1.fr/~tran/enseignements.html

Exercice 1 (Fonctions et Processus à variations finies)
1. Soit $a(t)$, $t \in [0,T]$ une fonction à variations finies et soit μ une mesure signée telle que $a(t) = \mu([0,t])$. Montrer qu'il existe une unique décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ où μ_+ et μ_- sont des mesures finies positives à support disjoint.

Exercice 2 (Martingales locales)
1. Si M est une martingale locale, il en est de même pour $M^T = (M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ pour tout temps d'arrêt T.
2. Si (T_n) réduit M et si (S_n) est une suite de t.a. tendant p.s. vers $+\infty$, alors $(T_n \wedge S_n)$ réduit également M.
3. Si M et N sont deux martingales locales, $M + N$ est encore une martingale locale.
4. Une martingale locale positive M (issue de 0) est une sur-martingale.

Exercice 3 (Compléments à la preuve de la variation quadratique)
Soit M une martingale continue et bornée par $K > 0$.

1. Soit $(t_i^n)_{0\leq i\leq p_n}$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0,T]$ dont le pas décroît vers 0. On considère :

$$X_t^n = \sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n}\big(M_{t_i^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t}\big)$$

Montrer que $(X_t^n)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale continue.

2. En décomposant M_T^2 avec les accroissements le long de la subdivision $(t_i^n)_{0\leq i\leq p_n}$, montrer que :

$$M_T^2 = X_T^n + \sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2.$$

3. Montrer que $X_T^n - X_T^m = \sum_{i=1}^{p_n}\big(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\big)^2 - \sum_{i=1}^{p_m}\big(M_{t_i^m} - M_{t_{i-1}^m}\big)^2$.

Notre but est de montrer que :

$$\lim_{n,m\to+\infty} \mathbb{E}\big((X_T^n - X_T^m)^2\big) = 0.$$

4. Soient deux subdivisions de $[0, T]$: $\{s_i, 1 \leq i \leq p\} \subset \{t_i, 1 \leq i \leq q\}$. On pose $w_i = \max\{s_j,\ s_j \leq t_i\}$ et :

$$Z = \sum_{i=1}^{p} \left(M_{s_i} - M_{s_{i-1}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{q} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2$$

Montrer que $Z = 2\sum_{i=1}^{q} \xi_i$ avec $\xi_i = (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_{i-1}} - M_{w_{i-1}})$.

5. Montrer que $\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{i=1}^{q} \mathbb{E}(4\xi_i^2)$.

6. On introduit $\alpha_i = \min\{t_k / |M_{t_k} - M_{w_i}| \geq \varepsilon\} \wedge \min\{s_j / s_j > w_i\}$. Soit $N \geq 1$ et $L = \min\{\ell / \sum_{i=0}^{\ell} \mathbf{1}_{\alpha_i < t_i} = N\}$. On pose $\gamma = \alpha_L$ si $L < +\infty$ et T sinon. Montrer que :

$$\mathbb{E}(Z^2) \leq C\varepsilon^2 \mathbb{E}(M_T^2) + C' \mathbb{E}(M_T^2 - M_\gamma^2) + C'' \mathbb{E}\Big(\sum_{i \leq L} \mathbf{1}_{\alpha_i < t_i} (M_{t_i}^2 - M_{\alpha_i}^2)\Big).$$

Conclure.

Exercice 4 (Espace des martingales de carré intégrables bornées dans L^2)
On note $\mathcal{H}^2$ l'ensemble des martingales continues bornées dans L^2 et issues de 0, que l'on munit du produit scalaire :

$$(M, N)_{\mathcal{H}^2} = \mathbb{E}(\langle M, N \rangle_\infty). \tag{1}$$

1. Justifier que (1) est bien défini pour des $M, N \in \mathcal{H}^2$. Prouver que (1) définit bien un produit scalaire.

2. Montrer que $(\mathcal{H}^2, (.,.)_{\mathcal{H}^2})$ est un espace de Hilbert.

Exercice 5 (Densité des processus élémentaires dans $L^2(M)$)
Soit M une martingale de $\mathcal{H}^2$.
On considère l'espace des processus élémentaires $\mathcal{E}$ de la forme $H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, (t_i) une suite finie de $\mathbb{R}_+$ et H_i des v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables.
Soit également $L^2(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que $\mathbb{E}(\int_0^{+\infty} H^2(s) d\langle M \rangle_s) < +\infty$.

Montrer que $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$.