Exo M2 recherche - Lille 1

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
page web : http://math.univ-lille1.fr/~tran/enseignements.html

Exercice 1 (2 Temps d'arrêts)
1. Si S et T sont deux temps d'arrêt et si $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
2. $\max(S,T)$ et $\min(S,T)$ sont deux temps d'arrêt.
3. $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Cette tribu contient $\{S \leq T\}$ et $\{S = T\}$.

Exercice 2 (Martingales liées à des PAI)
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un PAI par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
1. Si $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X_t \in L^1$, $(X_t - \mathbb{E}(X_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale.
2. Si $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X_t \in L^2$, $(X_t^2 - \mathbb{E}(X_t^2))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale.
3. Si $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\theta X_t}) < +\infty$, $(e^{\theta X_t}/\mathbb{E}(e^{\theta X_t}))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale.
4. En utilisant les questions 1 à 3, donner trois martingales construites à partir du mouvement Brownien.

Exercice 3 (Un résultat d'uniforme intégrabilité)
Soit X une v.a. réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ intégrable. Soit Γ l'ensemble des sous-tribus de $\mathcal{F}$. $\{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}); \mathcal{D} \in \Gamma\}$ est uniformément intégrable.

Exercice 4 (Une martingale arrêtée reste une martingale)
Soit X une martingale càd uniformément intégrable et T un t.a. Alors le processus $(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale càd, uniformément intégrable et $X_{t\wedge T} = \mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_t)$.