Exercices

Exercice 1 (Processus de naissance et de mort (3))
On considère la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \mathbb{N}$ de transition suivante :

$$\forall i > 0,\ P(i,i+1) = p_i, \quad P(i,i-1) = q_i, \quad P(i,i-1) = r_i, \quad ; \quad P(0,1) = p_0, \quad P(0,0) = 1 - p_0.$$

1. La chaîne est-elle irréductible ?
2. Montrer qu'une mesure réversible est stationnaire.
3. Montrer que toute mesure réversible est de la forme :

$$\mu(i) = \alpha\zeta(i), \qquad \text{où} \qquad \zeta(i) = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \text{ pour } i \geq 1, \quad \zeta_0 = 1.$$

4. Sous quelles conditions existe-t-il une probabilité stationnaire ? L'exprimer en fonction des ζ_i.
5. On suppose maintenant $\forall i \geq 0$, $p_i = p$, $\forall i \geq 1$, $q_i = q$. Sous quelle condition sur p et q a-t-on une probabilité stationnaire ? Calculer dans ce cas $\mathbb{E}_i(\sigma_i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (Processus de naissance et de mort (4))
On considère la chaîne de Markov sur $[\![0,b]\!]$ ($b \in \mathbb{N}^*$) avec $r_0 = 0$, $\forall i \in [\![1,b-1]\!]$ $p_i = p$, $r_b = 1$. **1.** Que dire des points 0 et b ?
2. On pose $f_i = \mathbb{P}_i(\tau_0 \wedge \tau_b < +\infty)$. En conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_1$ dans la définition de f_i, retrouver l'équation de récurrence satisfaite par f_i.
3. On définit $v_i = \mathbb{E}_i(\tau_0 \wedge \tau_b)$ qui est la durée moyenne de vie avant d'être piégé. En conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_1$, établir une relation de récurrence pour les v_i et en déduire v_i.

Exercice 3 (Processus de branchement)
Un fluide s'écoule le long des arêtes d'un arbre infini régulier n-aire, depuis la racine. Chaque sommet de l'arbre, indépendamment, est ouvert (laisse passer le fluide) avec probabilité a, ou fermé, avec probabilité $1-a$. On appelle p la probabilité de *percolation*, c'est-à-dire la probabilité que le fluide atteigne la frontière de l'arbre.
1. Montrer que $p = 0$ si et seulement si $a \leq 1/n$.
2. Montrer que si $a > 1/n$, alors $1-p$ est la seule solution de

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{a} \qquad x \geq 0.$$

3. Soit $(X_n,\ n \geq 0)$ une chaîne de Galton-Watson dont la loi de reproduction est dite « fracto–linéaire » (ou homographique), c'est-à-dire qu'il existe des probabilités a et b telles que

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = a \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(\xi = k \mid \xi \neq 0) = b^{k-1}(1-b) \qquad k \geq 1.$$

Calculer la fonction génératrice f de ξ, ainsi que son espérance m, et la probabilité d'extinction de $(X_n, n \geq 0)$.
4. On suppose dans cette question que $a \neq b$.
5. Calculer explicitement le rapport

$$\frac{f_n(s) - a/b}{f_n(s) - 1},$$

où f_n désigne la n-ième itérée de f.
6. En déduire la loi du temps d'extinction de Z.
7. Répondre aux sous-questions précédentes lorsque $a = b$.

Exercice 4 (Distributions quasi-stationnaires)
Soit $(X_n,\, n \geq 0)$ une chaîne de Markov à valeurs entières p.s. absorbée en 0.
1. Montrer que si ν est une probabilité quasi-stationnaire pour X, alors le temps d'extinction de X sous $\mathbb{P}_\nu$ a une loi *géométrique*.
2. On suppose maintenant que X est un Galton-Watson sous-critique de fonction génératrice f, et on désigne par Υ une v.a. distribuée suivant la loi de Yaglom :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*,\, \mathbb{P}(\Upsilon = j) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j \,|\, X_n > 0).$$

Établir que

$$\mathbb{E}(1 - s^\Upsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n(s)}{1 - f_n(0)} \qquad s \in [0,1],$$

où f_n désigne la n-ième itérée de f. **3.** En utilisant les résultats de l'exercice précédent, trouver la loi de Υ dans le cas « fracto-linéaire »avec $a > b$, montrer que sa loi ν est quasi-stationnaire, et donner le paramètre de la loi géométrique du temps d'extinction sous $\mathbb{P}_\nu$.

Exercice 5 (Galton-Watson sur-critique conditionné à l'extinction)
Soit $(X_n,\, n \geqq 0)$ une chaîne de Galton-Watson surcritique dont la variable de reproduction ξ a pour fonction génératrice f et dont la probabilité d'extinction est notée q $(f(q) = q)$.
1. Montrer que la chaîne conditionnée à l'extinction est encore une chaîne de Galton-Watson, que l'on caractérisera.
2. Dans les sous-questions suivantes, calculer l'espérance m de ξ, la probabilité d'extinction q de Z, et caractériser la loi de la chaîne conditionnée à l'extinction.
2a. Cas fracto-linéaire. Montrer que conditionner à l'extinction revient à permuter a et b. Cas particulier où $a = 1 - b$?
2b. Cas où ξ ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2. Montrer que conditionner à l'extinction revient à permuter p_0 et p_2.
2c. Cas poissonien de paramètre θ. Montrer que $q < 1/\theta$ et que conditionner à l'extinction revient à remplacer θ par θq.

Exercice 6 (Théorème ergodique pour les processus de Markov)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E de transition P récurrente positive de probabilité stationnaire μ. Soit f une fonction *intégrable* telle que $\sum_{x\in E} |f(x)|\mu(x) < +\infty$. On pose :

$$Z_0 = \sum_{k=0}^{\sigma_x - 1} f(X_k), \quad Z_p = Z_0 \circ \theta_{\sigma_x^p} = \sum_{k=\sigma_x^p}^{\sigma_x^{p+1}-1} f(X_k).$$

1. Calculer l'espérance $E_x(Z_0)$.
2. Montrer que la suite de v.a. $(Z_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est i.i.d.
3. Pour f et g intégrables avec $\langle \mu, g\rangle \neq 0$, en déduire la limite de :

$$\frac{\sum_{k=0}^{\sigma_x^n} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{\sigma_x^n} g(X_k)}.$$