Exo M2 recherche - Lille 1

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
page web : http://math.univ-lille1.fr/~tran/enseignements.html

Exercice 1 (Identité de Wald)
Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(T) < +\infty$ et B un mouvement Brownien standard. **1.** Montrer que $(B^2_{t\wedge T} - t\wedge T)_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que $(B_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale fermée, et préciser par quoi.
3. En déduire que $\mathbb{E}(B_T) = 0$ en justifiant avec l'aide d'un théorème d'arrêt.
4. En utilisant l'inégalité de Doob, montrer que $(B^2_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable.
5. En déduire que $(B^2_{t\wedge T} - t\wedge T)_{t\geq 0}$ est fermée, et préciser par quoi.
6. En utilisant à nouveau un théorème d'arrêt, montrer que $\mathbb{E}(B^2_T) = \mathbb{E}(T)$.

Exercice 2 (Temps d'atteinte pour le mouvement Brownien)
On pose pour $a > 0$:

$$T_a = \inf\{t \geq 0,\, B_t \geq a\} \tag{1}$$

1. Soit $\theta > 0$. Montrer que $(e^{\theta B_t - \theta^2 t/2})_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. En déduire que $(e^{\theta B_{t\wedge T_a} - \theta^2 (t\wedge T_a)/2})_{t\geq 0}$ est une martingale bornée (préciser le majorant).
3. En déduire qu'il s'agit d'une martingale fermée, et préciser par quoi (on se rappellera que les trajectoires du mouvement Brownien sont presque sûrement non bornées).
4. En appliquant un théorème d'arrêt, montrer que

$$\mathbb{E}(e^{-\theta^2 T_a/2}) = e^{-\theta a}. \tag{2}$$

5. En déduire la transformée de Laplace $\mathbb{E}(\exp(-\lambda T_a))$ (avec $\lambda > 0$) de T_a.

Exercice 3 (Variation quadratique du mouvement Brownien)
Soit $t > 0$ et soit $0 = t^n_0 < t^n_1 < \cdots < t^n_{p_n} = t$ une suite de subdivision de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (B_{t^n_i} - B_{t^n_{i-1}})^2 = t, \text{ dans } L^2. \tag{3}$$

Exercice 4 (Manipulation de crochets)
Soit M une martingale locale continue et T un temps d'arrêt. Montrer que

$$\langle M - M^T\rangle = \langle M\rangle - \langle M\rangle^T. \tag{4}$$

Exercice 5 (Intégrale $\int_0^t B_s ds$)
Soit B un mouvement Brownien standard réel.
1. En utilisant la formule d'Itô, écrire B^2 comme la somme d'un processus à variations finies et d'une martingale locale. Que pouvez-vous dire de cette martingale locale ?
2. Calculer le crochet de B et B^2.
3. On note $A_t = \int_0^t B_s ds$. Est-ce une martingale ou un processus à variations finies ?
4. Montrer que A_t suit une loi normale que l'on précisera.
5. Calculer la covariance $\text{cov}(A_t, A_s)$ avec $s < t$.

Exercice 6 (Utilisation du théorème de Lévy)
Soient X et Y deux mouvements Browniens réels indépendants. Soit H un processus progressif. On pose :

$$B_t = \int_0^t \cos(H_s) dX_s + \int_0^t \sin(H_s) dY_s \tag{5}$$

$$\widetilde{B}_t = \int_0^t \sin(H_s) dX_s - \int_0^t \cos(H_s) dY_s. \tag{6}$$

1. Montrer que B et $\widetilde{B}$ sont deux mouvements Browniens. **2.** Calculer leur crochet.

Exercice 7 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck)
On considère la diffusion réelle définie par :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \lambda(\mu - X_s) ds + \sigma B_t \tag{7}$$

où B est un mouvement Brownien standard de $\mathbb{R}$ et où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\mu - x(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{8}$$

Résoudre cette équation.
2. On pose $\eta_t = X_t - x(t)$. Ecrire l'équation différentielle stochastique (EDS) satisfaite par η_t.
3. Résoudre cette EDS et montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien dont on précisera la variation quadratique.
4. Donner la limite en loi de η_t, lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 8 (Résolution d'une EDS)
On considère l'EDS suivante :

$$dX_t = \sqrt{1 + X_t^2} dB_t + \frac{X_t}{2} dt, \quad X_0 = x. \tag{9}$$

1. A-t-on existence et unicité des solutions ? (dans quel sens ?)
2. Ecrire la formule d'Itô pour $f(t, X_t)$ avec $f \in \mathcal{C}_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déduire une fonction d'échelle de sorte à ce que $(f(t, X_t))_{t \geq 0}$ soit une martingale.
3. Calculer le crochet de cette martingale.
4. Conclure en donnant la solution de (9).