Examen M2 Proba et Appl. 2012
Modèles aléatoires en Ecologie

V. Bansaye, S. Méléard, V.C. Tran

Durée 3 heures. Notes de cours manuscrites autorisées.

On considère une population de cellules infectées par des parasites. Chaque cellule i contient une quantité de parasite $X_i(t) \in \mathbb{R}_+$, qui croît à vitesse 1, c'est-à-dire

$$X_i(t) = X_i(t_0) + t - t_0, \qquad \forall t \geq t_0.$$

Les cellules se divisent à un taux $r(x)$, où r est une fonction sous-linéaire :

$$\exists a \geq 0, b > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq r(x) \leq ax + b.$$

Lorsqu'il y a division d'une cellule contenant une quantité x de parasites, les deux filles remplacent la cellule mère, avec chacune une quantité $x/2$ de parasites. On suppose que l'on part d'une unique cellule infectée contenant x_0 parasites.

On représente la population de cellules par la mesure ponctuelle suivante :

$$Z_t(dx) = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{X_i(t)}$$

où N_t est le nombre de cellules au temps t et l'indexation de ces dernières peut se faire par quantité de parasites décroissante.

0.1. Préciser en fonction de r la valeur de $\mathbb{P}_{x_0}(\tau \geq t)$ où τ est le temps où se divise la cellule initiale avec $X_1(0) = x_0$.

0.2. Comment varie la quantité de parasites totale $\langle Z_t, x\rangle$ lors d'une division ? Quelle est la quantité totale de parasites au temps t ? Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$. Justifier que la mesure Z_t peut-être vue comme une mesure finie sur un compact à préciser qui ne dépend que de T.

0.3. Justifier que pour tout $T > 0$ et tout i, $r(X_i(t)) \leq \bar{r}_T$ pour $t \in [0, T]$, où $\bar{r}_T$ est une constante dépendant de T à préciser.

Partie 1 : Modèle microscopique

1.1. Soit $Q(ds, di, d\theta)$ une mesure ponctuelle de Poisson (MPP) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ de mesure intensité $q(ds, di, d\theta) = ds\, n(di)\, d\theta$ où ds et $d\theta$ sont la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et où $n(di)$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $Z_t(dx)$ est la solution de l' équation différentielle stochastique dirigée par Q suivante

$$Z_t(dx) = \delta_{x_0+t} + \int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{i\leq N_{s_-}} \mathbf{1}_{\theta\leq r(X_i(s_-))} \Big(2\delta_{X_i(s_-)/2+(t-s)}(dx) - \delta_{X_i(s_-)+(t-s)}(dx) \Big) Q(ds, di, d\theta)$$

1.2. Monter que pour la condition initiale x_0 donnée et pour une MPP Q donnée, l'EDS de la question 1.1 admet une unique solution sur $[0, T_\infty]$ où $T_\infty = \lim_{k\to+\infty} T_k$ et T_k est le $k^{\text{ième}}$ instant de division parmi toute la population cellulaire.

1.3. Montrer que pour $T > 0$, $\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \langle Z_t, 1\rangle^2 \Big) < +\infty$. Qu'en déduire pour

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \big(\int_{\mathbb{R}_+} (1+x) Z_t(dx) \big)^2 \Big) < +\infty \qquad ?$$

1.4. En déduire que $T_\infty = +\infty$ p.s.

1.5. Pour une fonction test $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, écrire $\langle Z_t, f\rangle$ sous la forme

$$\langle Z_t, f\rangle = f(x_0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} Gf(x) Z_s(dx)\, ds + M_t^f$$

où

$$Gf(y) = f'(y) + r(y)\big(2f(y/2) - f(y)\big) \tag{1}$$

et où M^f une martingale de carré intégrable, dont on donnera le crochet.

1.6. En déduire le générateur L de Z_t. On donnera $LF_f(\mu)$ pour une mesure finie $\mu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ et $F_f(\mu) = F(\langle \mu, f\rangle)$ où $F \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, R)$ (de classe $\mathcal{C}^1$, bornée et à dérivée bornée) et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1.7. On note $\mu_t \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ la mesure intensité de Z_t, définie pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par $\langle \mu_t, f\rangle = \mathbb{E}\big(\langle Z_t, f\rangle\big)$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,

$$\langle \mu_t, f\rangle = f(x_0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} Gf(y) \mu_s(dx)\, ds. \tag{2}$$

Préciser l'équation d'évolution pour $\langle \mu_t, x\rangle$.

1.8. On peut montrer qu'il est possible d'étendre (2) pour des fonctions test $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, bornées à dérivées bornées. On obtient alors de façon classique :

$$\langle \mu_t, f(., t)\rangle = f(x_0, 0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \big(\partial_s f(x,s) + Gf(x,s)\big) \mu_s(dx)\, ds. \tag{3}$$

Montrer l'unicité de la solution de (2).

Partie 2 : Comportement en temps long

On suppose qu'il existe un couple $(\lambda, V) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ tels que $GV = \lambda V$ où V est une fonction positive avec $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ V(x) \leq Cx$ pour une constante $C > 0$. V est alors une fonction propre de l'opérateur G.

2.1. Montrer que $\langle Z_t, V\rangle$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et intégrable.

2.2. Montrer que $\langle \mu_t, V\rangle = V(x_0)e^{\lambda t}$.

2.3. Montrer que $(\langle Z_t, V\rangle e^{-\lambda t})_{t\geq 0}$ est une martingale positive. En quoi ce résultat est-il intéressant pour le comportement en temps long de $\langle Z_t, V\rangle$?

Pour la fin de cette partie, on supposera que

$$r(x) = ax + b$$

avec $a > 0$ et $b \geq 0$.

2.4. Montrer que $V(x) = cx + 1$ est une fonction propre, pour une constante $c > 0$ et une valeur propre λ à spécifier.

2.5. En utilisant le couple (λ, V) et la martingale exhibée en question 2.3, on souhaite ramener l'étude du processus de naissances et de morts, à valeurs mesures, à celle d'un processus réel bien choisi (au moins pour étudier les propriétés de la mesure intensité).
Soit Y un processus de Markov réel de générateur défini pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par

$$Af(x) = f'(x) + r(x)\frac{2V(x/2)}{V(x)}\Big(f\big(\frac{x}{2}\big) - f(x)\Big).$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\langle \mu_t, f\cdot V\rangle e^{-\lambda t} = \mathbb{E}\big(f(Y_t)\big)$.
Indication : On pourra définir la mesure $\gamma_t(dx) = V(x)e^{-\lambda t}\mu_t(dx)$.

2.6. Montrer qu'il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $Af(x) \leq C_1 - C_2 f(x)$.

On admet que la question 2.6 nous donne une condition suffisante d'existence d'une probabilité stationnaire π telle que $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(g(Y_t)) = \langle \pi, g\rangle$.

2.7. Déduire du comportement de Y la limite $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\mathbb{E}(\langle Z_t, g\rangle)$ pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On voit ainsi comment obtenir des résultats sur le comportement en temps long et en espérance pour Z_t à partir de celui de Y_t.

Partie 3 : Limite EDP en grande population

On considère maintenant une population dont la taille initiale est K et dans laquelle le poids de chaque individu est renormalisé par $1/K$. La population est représentée par la mesure

$$Z_t^K(dx) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{N_t^K} \delta_{X_i(t)}(dx)$$

où N_t^K est le nombre d'individus vivant au temps t. On suppose que la condition initiale est $Z_0^K(dx) = \delta_{x_0}(dx)$ pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, ce qui revient à avoir initialement K individus de trait

x_0. Dans tout ce qui suit, $T > 0$ est un horizon de temps fixé et fini.

3.1. Montrer que les supports des mesures Z_t^K, pour $t \in [0, T]$ sont inclus dans un compact $\mathcal{K}$ qu'on précisera. Montrer que $\sup_{K \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}\big(\sup_{t\in[0,T]} \langle Z_t^K, 1\rangle^2\big) < +\infty$.

3.2. Montrer que la suite $(Z^K)_{K\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\mathcal{K}))$.

3.3. Montrer que les valeurs d'adhérence $(\bar{z}_t)_{t\geq 0}$ de Z^K satisfont l'équation (2).

3.4. En utilisant (3) pour un bon choix de fonction test f, montrer que pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et positive, $\langle \bar{z}_t, \varphi\rangle = \varphi(x_0 + t) + \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x)H(x, t)dx$, où $H(x, t)$ est une fonction qu'on précisera. On pourra introduire la mesure $\Gamma(ds, dx) = \bar{z}_s(dx)ds$ et qui peut s'écrire sous la forme $\Gamma(ds, dx) = \gamma_x(s)ds\, q(dx)$ avec $q(dx)$ la marginale par rapport à x de $\Gamma(ds, dx)$.

3.5. En déduire l'EDP dont la densité H est solution.