Examen de Statistique - M1 IM - 8 janvier 2013

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr
Emeline Schmisser, emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 3h.

Exercice 1 (Tests sur le paramètre d'une loi exponentielle)
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots X_n$ de loi $Exp(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ un paramètre inconnu. On rappelle que la densité de la loi exponentielle de paramètre λ est

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0} dx.$$

1. Ecrire le modèle statistique. Est-ce un modèle exponentiel ? Quelle est la statistique canonique T_n ? Est-elle exhaustive, complète ?
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance, $\widehat{\lambda}_n$.
3. Le modèle est-il régulier ? Calculer l'information de Fisher du modèle.
4. L'estimateur $\widehat{\lambda}_n$ est-il un estimateur sans biais ? Est-ce un estimateur efficace ?
5. Quelle est la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)$?
6. On souhaite tester $H_0 : \lambda = 1$ contre $H_a : \lambda < 1$, au niveau $\alpha \in]0, 1[$. Existe-t-il un test uniformément plus puissant pour cela, et si oui, quelle est sa région critique ?

Exercice 2 (Loi Beta)
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. dont la loi commune $\mathbb{P}_\theta$ a une densité $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{x \in]0,1[}$ avec $\theta > 0$, par rapport à la mesure de Lebesgue.
1. Ecrire le modèle et trouver une statistique exhaustive T_n pour θ.
2. Montrer que $-\log(X_i)$ est une v.a. exponentielle de paramètre θ (on pourra faire un changement de variable, ou calculer la fonction de survie).
3. En déduire la loi de $-2\theta \log(X_i)$ puis la loi de $-2\theta T_n$. (on rappelle que la loi $\chi^2(2)$ est la même que la loi exponentielle de paramètre 1/2).
4. Trouver un test UPP pour résoudre $H_0 : \theta = 6$ contre $H_1 : \theta < 6$ au seuil α. On exprimera la région critique en fonction de quantiles de la loi $\chi^2(2n)$.
5. Exprimer la puissance du test en fonction de la fonction de répartition de la loi $\chi^2(2n)$.
6. Le test est-il sans biais ?
7. Comment évolue la puissance quand θ diminue ? Quelle est sa limite quand $\theta \to 0$?

Exercice 3 (Loi géométrique)
On considère sur les entiers $\mathbb{N}$ la loi de probabilité P_λ de paramètre $\lambda > 1$ donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ P_\lambda\{k\} = \frac{(\lambda - 1)^k}{\lambda^{k+1}}.$$

On admettra qu'une primitive de $1/\sqrt{x(x-1)}$ est $\text{argch}(2x - 1)$.
1. Ecrire le modèle et montrer qu'il s'agit d'un modèle exponentiel. Soit X une variable aléatoire de loi P_λ. Quelle est la statistique canonique, qu'on notera T par la suite ?
2. Soit Y une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/\lambda$. Exprimer X en fonction de Y (en loi).
3. Démontrer que $E(X) = \lambda - 1$ et que $\text{Var}(X) = \lambda(\lambda - 1)$.

4. On dispose de n observations i.i.d. $X_1, \cdots, X_n$ de loi P_λ. Ecrire la vraisemblance et la log-vraisemblance des observations.
5. Donner une statistique exhaustive complète S_n du modèle.
6. Soit $A_n = \{\omega \in \Omega,\ X_1(\omega) = X_2(\omega) = \cdots) X_n(\omega) = 0\}$. Quelle est la probabilité de cet événement ? Calculer la limite de $\mathbb{P}(A_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
7. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}_n$ de λ. Que se passe-t-il si l'événement A_n se produit ?
8. Quel est le risque quadratique de $\widehat{\lambda}_n$?
9. Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)$ quand $n \to +\infty$?
10. En déduire l'information de Fisher du modèle.
11. En utilisant la δ-méthode, trouver une fonction g (ne dépendant pas de λ) telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}(g(\widehat{\lambda}_n) - g(\lambda)) = \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi.}$$

12. En déduire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour $g(\lambda)$, puis un intervalle de confiance de même niveau asymptotique pour λ.

On veut utiliser les observations pour tester l'hypothèse $H_0 : \lambda \geq L$ (où $L > 1$) contre l'alternative $\lambda < L$ au niveau $\alpha \in]0,1[$.
13. Le modèle est-il à rapport de vraisemblance monotone ? Croissant ou décroissant ?
14. On se donne $L_1 < L$. Quelle est la région critique du test optimal pour tester $H_0 : \lambda = L$ contre $H_1 : \lambda = L_1$ au niveau α ?
15. Le test construit à la question **12.** est-il uniformément plus puissant pour tester $H_0 : \lambda = L$ contre $H_1 : \lambda < L$?
16. Conclure par rapport au test qu'on veut initialement faire.