

Examen - Probabilité Statistique

ENSAM 1A - PT

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Qualité de l'air)

Lors d'une étude pour juger de la qualité de l'air en Lorraine, on a établi un indice allant de 1 (très bon) à 10 (très mauvais). Pour Forbach, ceci donne :

Indice	[1,4[[4,6[[6,10]
	74.5	13.7	11.8

TAB. 1 – Pourcentage de jours dans l'année pendant lesquels la qualité était très bonne (1 à 4), moyenne (4 à 6) ou mauvaise (plus de 6)

On a des données groupées : les individus sont les jours où les relevés sont faits, la variable est l'indice.

1. Quel est le type de la variable ?
2. Dessiner l'histogramme de la variable **indice**.
3. Quel est la proportion des journées pour lesquelles l'indice était inférieur à 3 à Forbach ?
4. Dessiner la fonction de répartition (interpolation linéaire) à partir du Tableau 1.
5. Calculer la médiane.

Exercice 2 (Présidentielles)

Lors d'une élection, on suppose qu'une proportion p de la population compte voter pour Nicolas tandis que les $1 - p$ restants ont l'intention de voter pour Ségolène. On interroge n personnes, choisies de façon indépendante dans la population, et on suppose qu'elles répondent honnêtement. Soit X_i la réponse de la personne i . On suppose que $X_i = 1$ si la personne vote pour Nicolas, 0 si elle vote pour Ségolène.

1. Quelle est la loi de X_i ? Rappeler son espérance et sa variance.
2. Soit $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ la moyenne empirique. Recalculer l'espérance et la variance de \bar{X}_n .
3. Quelle est la limite de \bar{X}_n lorsque $n \rightarrow +\infty$? De quelle quantité \bar{X}_n est-elle un estimateur ?
4. Donnez l'intervalle de confiance à 95% auquel appartient p lorsque l'on interroge $n = 1000$ personnes (on rappelle que si T suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(-1.96 < T < 1.96) = 0.95$). Dans le cas où $\bar{X}_n = 51\%$ (et $1 - \bar{X}_n = 49\%$), faire l'application numérique pour obtenir les bornes de cet intervalle. Commentaire ?
5. Ecrire la vraisemblance des observations X_1, \dots, X_n .
6. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p . Commentaire ?