

Examen - Probabilité Statistique - ENSAM 1A - PSI

Durée 1 heure. Calculatrice autorisée. Documents NON autorisés.

Exercice 1 (Etude d'une variable aléatoire continue)

On considère une variable aléatoire réelle X dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$ avec $\lambda > 0$ et $c > 0$.

1. Calculer c pour que f soit bien une densité de probabilité (indication : on pourra séparer \mathbb{R} en $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$).
2. Expliquer pourquoi $\mathbb{E}(X) = 0$.
3. Calculer $\mathbb{E}(|X|)$.
4. Calculer la variance de X .
5. On dispose d'observations obtenues à partir de n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de même loi que X . Ecrire la vraisemblance de X_1, \dots, X_n .
6. Calculer l'estimateur $\hat{\lambda}_n$ du maximum de vraisemblance de λ .
7. Justifier pourquoi $\hat{\lambda}_n$ converge vers $1/\mathbb{E}(|X|)$ quand le nombre d'observations n tend vers $+\infty$. Commentaire ?
8. Donner un intervalle de confiance pour $1/\hat{\lambda}_n$. On rappelle que si Y suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(-1.96 < Y < 1.96) = 0.95$.

Exercice 2 (Test de médicaments)

Dans le cadre d'une étude de médicaments pour le soulagement des symptômes du rhume, on considère trois type de médicaments ($X=A, B$ ou C). On étudie leur action Y (qui va de 0 : "aucune action" à 10 : "très efficace"). On donne à chaque individu malade l'un des trois médicaments, et chaque patient note le médicament.

$Y \setminus X$	A	B	C
$[0, 3[$	42	18	31
$[3, 8[$	25	20	30
$[8, 10]$	20	37	15

1. Quelle est la population ? Donner sa taille. Quelles sont les variables étudiées et leurs types ?
2. Calculer les distributions marginales.
3. Représenter graphiquement les distributions conditionnelles de Y sachant $X = A$ et $X = B$. Les deux caractères X et Y peuvent-ils être considérés comme indépendants ?
4. Calculer la fonction de répartition des notes de A .
5. Déterminer graphiquement et par le calcul la note médiane de A .