Examen “Probabilités : modèles et applications” - M1 IM - 8 janvier 2015

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 3h.

Exercice 1 (Espérance conditionnelle)
On considère un couple aléatoire (X, M) tel que M suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \theta^2)$ et, conditionnellement à $M = m$, X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X \mid M)$, $\mathbb{E}(XM)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

2. Montrer que la loi jointe de (X, M) est une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^2$ dont on précisera l'espérance et la matrice de variance-covariance.

3. Calculer la densité marginale de X.

4. Quelle est alors la densité de M conditionnellement à $X = x$ (on la notera $f_x(m)$) ? On pourra introduire :

$$\sigma_0^2 = \frac{\theta^2\sigma^2}{\theta^2 + \sigma^2}.$$

5. Calculer $\mathbb{E}\Big(\big(M - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}X\big)\mathbf{1}_{[0,3]}(M) \mid X = x\Big)$.

Exercice 2 (Problème d'urne)
On considère 4 boules et 2 urnes A et B. A chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, on tire une boule au hasard, chaque boule ayant la probabilité 1/4 d'être choisie. Puis, avec probabilité 1/2, on la met dans l'urne A et avec probabilité 1/2, on la met dans l'urne B. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A au temps n, partant de la condition initiale X_0. X_n est à valeurs dans $\{0, \ldots, 4\}$ et définit une chaîne de Markov.

1. Tracer le graphe de cette chaîne, en indiquant les transitions. Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne. Ecrire aussi $P(i, i+1)$, $P(i, i-1)$ et $P(i, i)$ en fonction de i.

2. Cette chaîne est-elle irréductible ? transciente ou récurrente ? si récurrente, récurrente positive ou récurrente nulle ? apériodique ? Jusitifier.

3. Soit $\tau = \inf\{n \geq 0,\ X_n \in \{0, 4\}\}$ le premier temps où la chaîne atteint l'un des bords, 0 ou 4. Montrer que τ est un temps d'arrêt pour la filtration canonique $(\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $i \in \{0, \ldots 4\}$. Justifier que $\mathbb{P}_i(\tau < +\infty) = 1$.

5. On note $u(i) = \mathbb{P}_i(X_\tau = 0)$. En utilisant la propriété de Markov simple pour $i \in \{1, \ldots, 3\}$, obtenir les équations que satisfait $u(i)$.

6. En déduire que pour $i \in \{1, \ldots, 3\}$, $\frac{4-i}{8}\big(u(i+1) - u(i)\big) = \frac{i}{8}\big(u(i) - u(i-1)\big) = \frac{i!}{8^i}(u(1) - u(0))$.

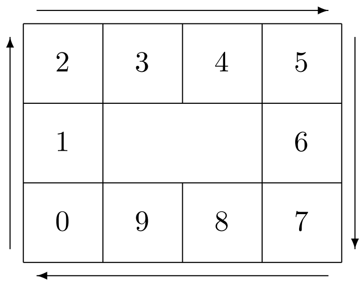
7. Ecrire, pour chacun des $i \in \{1, 2, 3\}$, $u(i+1) - u(i)$ en fonction de $u(1) - u(0)$. En déduire $u(1)$, puis les valeurs des autres $u(i)$.

8. Calculer la probabilité invariante π de cette chaîne, en justifiant son existence. *indication :* on pourra écrire les π_i en fonction de π_1 et utiliser que π est une probabilité.

9. Exprimer la proportion du nombre de fois, entre les temps 0 et n, où on observe strictement moins de boules dans A que dans B. Vers quoi converge cette proportion lorsque $n \to +\infty$?

10. Quelle est la limite, lorsque $n \to +\infty$, de la probabilité que X_n soit pair ?

Exercice 3 (Monopoly)
On considère un jeu de Monopoly à 10 cases, comme sur la figure ci-dessous. On choisit $E = \{0, \ldots 9\}$ comme espace d'états. On part de la case 0 ($X_0 = 0$) et on parcourt le circuit dans le sens des aiguilles d'une montre en lancant à chaque tour un dé équilibré à 6 faces. X_n est la position du pion après le $n^{\text{ième}}$ lancer.



On dit qu'une matrice de transition $P = (P(i,j))_{1 \leq i,j \leq m}$ est bistochastique si la somme de chaque colonne est aussi égale à 1.

1. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ayant une matrice de transition bistochastique.

2. Montrer que cette chaîne est irréductible apériodique. L'apériodicité dépend-elle du nombre de case ?

3. Vers quoi converge X_n lorsque n tend vers l'infini ?

4. Calculer l'espérance du temps de retour 0 (temps auquel on touche double paye) : $\mathbb{E}_0(S_0)$ où $S_0 = \inf\{n \geq 1,\ X_n = 0\}$.