Examen “Probabilités : modèles et applications” - M1 IM - 10 janvier 2014

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 3h.

Exercice 1 (Chaîne de Markov à 4 états)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$, dont la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

1. Tracer le graphe de la chaîne. La chaîne est-elle irréductible ?

2. Existe-t-il une probabilité invariante ? Si oui, la déterminer.

3. Calculer $\mathbb{E}_2(S_2)$ où S_2 est le temps de retour à l'état $\{2\}$.

4. La suite $u_n = \mathbb{P}_2(X_n = 2)$ a-t-elle une limite lorsque $n \to +\infty$? Si oui, pourquoi ? et quelle est cette limite ?

Exercice 2 (Ruine du joueur)
Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de hasard. Ils misent chacun 1 euro à chaque fois, lors de parties indépendantes au cours desquelles la probabilité de victoire de A est égale à $p \in]0, 1[$. Soit X_n la fortune de A après n parties, et soit R les richesses totales en jeu (c'est-à-dire la somme des fortunes de A et B, qui reste constante au cours du temps). Le jeu se termine au temps aléatoire T où l'un des joueurs est ruiné :

$$T = \inf\{n \geq 1,\ X_n = 0 \text{ ou } X_n = R\}.$$

Pour $n \geq T$, on peut considérer que $X_n = X_T$. On note $u(x) = \mathbb{P}_x(X_T = R,\ T < +\infty)$ la probabilité que A gagne, partant d'une fortune initiale de $x \in \{0, \dots, R\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'état et la matrice de transition P.

2. Quelles sont les classes d'équivalence ? Préciser pour chacune si elles sont récurrentes ou transitoires.

3. Que valent $u(0)$ et $u(R)$?

4. Etablir une relation de récurrence satisfaite par $u(x)$ pour $x \notin \{0, R\}$. La résoudre pour déterminer $u(x)$. On discutera en fonction des valeurs de p.

5. De même, que vaut, en fonction de p, $v(x) = \mathbb{P}_x(X_T = 0,\ T < +\infty)$ (commenter en fonction de p) ? Qu'en déduire pour $\mathbb{P}_x(T < +\infty)$?

Exercice 3 (Algorithme de Métropolis)
Soit $E = \{1, \dots N\}$ et soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E. On supposera dans tout l'exercice que P est symétrique, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$,

$$P(x, y) = P(y, x).$$

1. Justifier que la chaîne de Markov est récurrente positive.

Soit $(\pi(x),\ x \in E)$ une probabilité sur E (qui n'est pas nécessairement la probabilité invariante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Le but de l'exercice est de construire à partir de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle chaîne de Markov dont la probabilité invariante est π.

2. On définit une nouvelle matrice Q de la façon suivante, pour $x, y \in E$:

$$Q(x,y) = \begin{cases} P(x,y)\big(1 \wedge \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\big) & \text{si} \quad x \neq y, \\ 1 - \sum_{z\neq x} Q(x,z) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que Q est une matrice de transition.

3. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov obtenue de la façon suivante :
- On se donne $Y_0 = X_0$.
- Si Y_k a été construit, on tire une variable aléatoire Z_{k+1} dans la probabilité $(P(Y_k, y),\ y \in E)$. Z_{k+1} correspondrait à l'état en $k+1$ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $X_k = Y_k$.
- On tire une variable de Bernoulli $U_{k+1} \rightsquigarrow \mathrm{Ber}\big(\frac{\pi(Z_{k+1})}{\pi(Y_k)} \wedge 1\big)$. Si $U_{k+1} = 1$, alors on définit $Y_{k+1} = Z_{k+1}$, sinon, $Y_{k+1} = Y_k$.

Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de transition Q.

4. Montrer que si $P(x, y) > 0$ alors $Q(x, y) > 0$. En déduire que la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également irréductible récurrente positive.

5. Montrer que π est réversible pour Q, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$, $\pi(x)Q(x, y) = \pi(y)Q(y, x)$.

6. En déduire que π est la probabilité invariante de la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.