Examen “Probabilités : modèles et applications” - M1 IM - 09 janvier 2013

Calculatrice et formulaire sur copie double autorisés. Durée : 3h.

Exercice 1 (Théorème d'arrêt borné)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni de la filtration $\mathcal{F}_t$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et soient T_1 et T_2 deux temps d'arrêt tels qu'il existe une constante $M > 0$ pour laquelle

$$\forall \omega \in \Omega,\ 0 \leq T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq M.$$

1. Soit T un temps d'arrêt borné par M presque sûrement. On considère la martingale arrêtée définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$ par $X_n^T(\omega) := X_{n\wedge T(\omega)}(\omega)$. Montrer que la martingale arrêtée $(X_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
2. En déduire que pour $k \leq M$, $\mathbb{E}(X_{T\wedge M} \mid \mathcal{F}_k) = X_{T\wedge k}$.

3. Montrer que X_{T_1}, $X_{T_2} \in L^1$.
4. Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_{T_1}$-mesurable. Pour $k \leq M$, montrez que :

$$\mathbb{E}(X_{T_2\wedge M} Z \mathbf{1}_{T_1=k}) = \mathbb{E}(X_k Z \mathbf{1}_{T_1=k}).$$

5. Calculer $E(X_{T_2} Z)$ pour en déduire que $\mathbb{E}(X_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) = X_{T_1}$.

6. En utilisant le théorème d'arrêt borné, montrer que pour tout temps d'arrêt T borné, $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
7. Soient Y_i des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2$. Soit $X_0 = 0$ et $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
7.1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
7.2. Soit $\tau = \inf\{n \geq 0, X_n = 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(X_0)$ et $E(X_\tau)$. Pourquoi n'a-t-on pas le résultat de la question **6.** ?

Exercice 2 (Marche aléatoire bornée)
Le problème se décompose en 3 parties. La partie 2 est la suite de la partie 1. La partie 3 peut être traitée indépendamment.

<u>PARTIE 1 :</u> On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $E = \{0, 1, \cdots, N\}$, avec N un entier strictement positif, donnée par les transitions suivantes : $P(0,0) = P(N,N) = 1$, et pour $i \in \{1, \cdots, N-1\}$,

$$P(i, i+1) = p, \qquad P(i, i-1) = q := 1 - p$$

avec $p \in]0, 1[$.
On note $\tau_0 = \inf\{n \geq 0,\ X_n = 0\}$, $\tau_N = \inf\{n \geq 0,\ X_n = N\}$ et $f_i = \mathbb{P}_i(\tau_0 < +\infty)$.
On pourra voir X_n comme la position d'une particule de poussière dans une cuve d'eau de hauteur N. La poussière finit par se fixer soit au fond de la cuve, soit à la surface.

1. Tracer le graphe de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La chaîne de Markov est-elle irréductible ?

3. Donner les classes d'équivalence de cette chaîne et préciser leurs natures (récurrentes ou transcientes).
4. Quelle est la valeur de f_0 ? de f_N ?
5. Pour $i \in \{1, \cdots N-1\}$, établir une relation de récurrence entre f_i, f_{i-1} et f_{i+1}.
6. En déduire la valeur de f_i en fonction de p, q, N et i. On distinguera le cas $p \neq 1/2$ et le cas $p = 1/2$.

<u>PARTIE 2 :</u> Soit $a \in \{1, \cdots N-1\}$ un niveau fixé entre 0 et N. On note N_a le nombre de passage de la particule en a avant d'atteindre le niveau 0 ou le niveau N. On note $\tau_a = \inf\{n > 0,\ X_n = a\}$ et $\rho_a = \mathbb{P}_a(\tau_a < +\infty)$.
1. Que vaut $\mathbb{P}_a(N_a = 1)$, en fonction de ρ_a ?
2. Montrer que pour un entier $k > 1$, $\mathbb{P}_a(N_a = k) = (1-\rho_a)\rho_a^{k-1}$. Quelle est la loi de N_a ?
3. Soit $\sigma_a = \sup\{n \geq 0,\ X_n = a\}$ le dernier temps de passage de la particule en a avant d'être fixée en 0 ou N. Est-ce que σ_a est un temps d'arrêt ?
4. Justifier que

$$\mathbb{E}_a(\sigma_a) = \mathbb{E}_a\Big(\sum_{i=1}^{N_a-1} \tau^{(i)}\Big)$$

où les $\tau^{(i)}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que τ_a conditionnée par $\{\tau_a < +\infty\}$. On admettra que les $\tau^{(i)}$ sont indépendants de N_a.
5. Expliquer pourquoi $\mathbb{E}_a\Big(\sum_{i=1}^{N_a-1} \tau^{(i)} \mid N_a = k\Big) = (k-1)\mathbb{E}_a(\tau_a \mid \tau_a < +\infty)$. En déduire que

$$\mathbb{E}_a(\sigma_a) = \frac{\mathbb{E}_a(\tau_a \mathbf{1}_{\tau_a < +\infty})}{\mathbb{P}_a(N_a = 1)}$$

<u>PARTIE 3 :</u> On suppose maintenant que :

$$P(0,0) = q, \qquad P(0,1) = p, \qquad P(N, N-1) = q, \qquad P(N,N) = p.$$

1. Expliquer pourquoi la chaîne de Markov est alors irréductible récurrente.
2. Soit $\pi = (\pi(i),\ i \in \{0, \cdots, N\})$ une mesure invariante. Ecrire les équations reliant, en fonction de p et q :

1. $\pi(0)$ et $\pi(1)$,
2. $\pi(N)$ et $\pi(N-1)$,
3. $\pi(i)$, $\pi(i-1)$ et $\pi(i+1)$ pour $i \in \{1, \cdots, N-1\}$.

3. Montrer que pour tout $i \in \{0, \cdots, N\}$, $\pi_i = (p/q)^i \pi_0$.
4. En déduire une probabilité invariante pour la chaîne de Markov. Cette probabilité est-elle unique ?
5. Déduire la valeur de $\mathbb{E}_0(S_0)$ où $S_0 = \inf\{n > 0,\ X_n = 0\}$ est le premier temps de retour en 0.