Examen M2 Proba et Appl. 2011
Modélisation stochastique de populations structurées

S. Méléard, V.C. Tran, V. Bansaye

Durée 3 heures. Notes de cours manuscrites et poly autorisés.

Le but de ce problème est d'étudier des phénomènes de séparation d'échelles de temps pour des populations structurées par âge. On considère une population où les individus sont caractérisés par leur âge dans $\mathbb{R}_+$. La population est représentée par la mesure :

$$X_t^K(da) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{N_t^K} \delta_{A_i(t)}(da)$$

où $N_t^K = K\langle X_t^K, 1\rangle$ est la taille de la population au temps t et $A_i(t)$ est l'âge du $i^{\text{ème}}$ individu le plus âgé au temps t.

• Les individus vieillissent à la vitesse K : l'âge au temps t d'un individu né au temps t_0 est donc $a = K \times (t - t_0)$.
• Un individu d'âge a donne naissance à un individu d'âge 0 au taux $K\ r(a) + b(a)$ où $b(.)$ est une fonction continue bornée par $\bar{b}$. La fonction $r(a)$ est continue avec $\underline{r} \leq r(a) \leq \bar{r}$, et $\underline{r}$, $\bar{r} > 0$.
• Le taux de mort d'un individu d'âge a au temps t est $K\ r(a) + \eta\langle X_t^K, 1\rangle$ avec $\eta \geq 0$.

On suppose que :

$$\lim_{K\to+\infty} X_0^K(da) = m_0(a)da \tag{1}$$

en probabilité, dans $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ muni de la topologie de la convergence étroite,

$$\text{avec } \sup_{K\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\big(\langle X_0^K, 1\rangle^3\big) < +\infty. \tag{2}$$

Dans tout le problème, on s'intéresse à un intervalle de temps fini $[0, T]$ avec $T > 0$.

Partie I : étude de X^K pour K fixé

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et une mesure aléatoire ponctuelle de Poisson $Q(ds, di, d\theta)$ sur cet espace, de mesure intensité $q(ds, di, d\theta) = ds\ n(di)\ d\theta$, où ds et $d\theta$ sont des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et où $n(di)$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Pour $f(a) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on se donne la représentation suivante de $\langle X_t^K, f\rangle$:

$$\langle X_t^K, f\rangle = \langle X_0^K, f\rangle + \int_0^t K\langle X_s^K, f'\rangle ds + \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{i\leq N_{s_-}^K} \Big\{\mathbf{1}_{\theta\leq Kr(A_i(s_-))+b(A_i(s_-))} f(0)$$
$$- \mathbf{1}_{Kr(A_i(s_-))+b(A_i(s_-))<\theta\leq 2Kr(A_i(s_-))+b(A_i(s_-))+\eta\langle X_{s_-}^K,1\rangle} f(A_i(s_-))\Big\} Q(ds, di, d\theta) \tag{3}$$

1. Justifier que pour une fonction $f(a) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée et à dérivée bornée, le processus :

$$\begin{aligned} M_t^{f,K} =& \langle X_t^K, f\rangle - \langle X_0^K, f\rangle - \int_0^t K\langle X_s^K, f'\rangle ds \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\big(Kr(a) + b(a)\big) f(0) - \big(Kr(a) + \eta\langle X_s^K, 1\rangle\big) f(a) \Big) X_s^K(da)\, ds \end{aligned} \quad (4)$$

est une martingale locale.

2. Montrer que sous (2), $\sup_{K\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\Big(\sup_{s\leq t}(1 + \langle X_s^K, 1\rangle)^3 \Big) < +\infty$ pour tout $t > 0$. Indication : on pourra utiliser que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

3. En déduire que $M^{f,K}$ est une martingale de carré intégrable et donner sa variation quadratique prévisible.

Partie II : tension uniforme des processus X^K

1. Montrer que les processus $(\langle X_\cdot^K, 1\rangle)_{K\in\mathbb{N}^*}$ sont uniformément tendus dans $\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R})$.

2. Pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $\sup_{K\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} \langle X_t^K, 1\rangle > n) < \varepsilon$.

3. On considère $K \in \mathbb{N}^*$, fixé. Soit $D_i(t)$ l'âge de mort de l'individu i vivant au temps t. On a bien sûr $A_i(t) \leq D_i(t)$. Expliquer comment on peut construire, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et avec la même mesure Q qu'en (3), un processus Y^K pour lesquel le taux de mort individuel est $K\underline{r}$ (le taux de naissance restant inchangé), et tel que presque sûrement, $D_i(t) \leq D_i^0(t)$, où $D_i^0(t)$ est l'âge à la mort de l'individu i vivant au temps t dans Y^K.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $\lambda, \alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N_t^K} \mathbf{1}_{A_i(t)\geq\alpha} > \lambda,\ N_t^K \leq nK \Big) \leq \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{nK} \mathbf{1}_{E_i\geq\alpha} > \lambda \Big),$$

où les $(E_i)_{1\leq i\leq nK}$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\underline{r}$.

5. On rappelle que pour m variables aléatoires indépendantes Z_i centrées et telles que $|Z_i| \leq M$, l'inégalité de Bernstein donne que pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^m Z_i \geq \lambda \Big) \leq \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2(mM^2 + \lambda M/3)} \Big).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant les questions **II-2)** et **II-4)**, montrer qu'il existe α et K_0 tels que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\sup_{K\geq K_0} \mathbb{P}(X_t^K([0,\alpha]^c) > \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

6. Pour $\varepsilon > 0$, en déduire que l'on peut choisir α assez grand tel que :

$$\sup_{K\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\Big(\int_0^T X_t^K([0,\alpha]^c)dt \Big) \leq \mathrm{Cte}\sqrt{\varepsilon}$$

7. Qu'est-ce que cela signifie pour la famille de mesures $(\Gamma^K(da, dt) = X_t^K(da)\ dt)_{K\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{M}_F([0,T]\times\mathbb{R}_+)$?

8. En déduire que la suite $(\Gamma^K, \langle X_\cdot^K, 1\rangle)_{K\in\mathbb{N}^*}$ est tendue dans $\mathcal{M}_F([0,T]\times\mathbb{R}_+)\times\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}_+)$.

Partie III : identification des valeurs d'adhérence

Dans la suite, on considère $(\Gamma, \bar{X}) \in \mathcal{M}_F([0,T]\times\mathbb{R}_+)\times\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}_+)$ une valeur d'adhérence de la suite $(\Gamma^K, \langle X_\cdot^K, 1\rangle)_{K\in\mathbb{N}^*}$.

1. Justifier pourquoi on peut écrire que $\Gamma(da, ds) = \gamma_s(da)\bar{X}_s ds$.

2. Montrer que pour $t \in [0,T]$ fixé, la famille $(M_t^{f,K}/K)_{K\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable.

3. En utilisant (4), montrer que $(M_t^{f,K}/K)_{K\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout $t\in[0,T]$ vers

$$\bar{M}_t^f = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Big(f'(a) + r(a)\big(f(0) - f(a)\big)\Big)\bar{X}_s\gamma_s(da)ds.$$

4. En utilisant **III-2)**, montrer par ailleurs que la limite $\bar{M}^f$ de $(M^{f,K}/K)_{K\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale. En déduire que pour tout $t\in[0,T]$, $\bar{M}_t^f = 0$.

5. En choisissant une fonction test de la forme $f(a) = \varphi(0) + \int_0^a \varphi(\alpha)d\alpha$ avec $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, montrer que $\gamma_t(da)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ presque partout en $t\in[0,T]$ et que sa densité $\widehat{m}_t(a)$ résout :

$$\partial_a\widehat{m}_t(a) = -r(a)\widehat{m}_t(a)$$

6. Résoudre l'équation précédente pour obtenir la densité de probabilité $\widehat{m}_t(a)$. On justifiera en particulier que $\widehat{m}_t(a)$ ne dépend pas de t. On le notera par la suite $\widehat{m}(a)$.

7. Montrer que sur un espace de probabilité éventuellement élargi, il existe un mouvement Brownien B tel que $\bar{X}$ est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\bar{X}_t = \int_{\mathbb{R}_+} m_0(a)da + \int_0^t \big(\widehat{b}\bar{X}_s - \eta\bar{X}_s^2\big)ds + \int_0^t \sqrt{2\widehat{r}\bar{X}_s}dB_s \tag{5}$$

où $\widehat{b} = \int_{\mathbb{R}_+} b(a)\widehat{m}(a)da$ et $\widehat{r} = \int_{\mathbb{R}_+} r(a)\widehat{m}(a)da$.

8. Que peut-on en déduire par rapport à une éventuelle convergence de $(\langle X_\cdot^K, 1\rangle)$?

Remarque : (5) peut s'interpréter comme une séparation d'échelles de temps. L'effectif de la population évolue comme une diffusion de Feller, alors que la distribution d'âge se stabilise dans l'équilibre prévu par l'EDP de McKendrick-Von Foerster :

$$\partial_t m + \partial_a m(a,t) = -r(a)m(a,t), \qquad m(0,t) = \int_{\mathbb{R}_+} r(a)m(a,t)da.$$

Partie IV : probabilité d'extinction et de survie

Dans un premier temps, on considère que $\eta = 0$.

1. Calculer la transformée de Laplace de $\bar{X}_t$ pour $t \in [0, T]$. On pourra utiliser que

$$v(t,x) = \exp\Big(- \frac{\lambda e^{\widehat{b}t} x}{\frac{2\widehat{r}\lambda}{\widehat{b}}(e^{\widehat{b}t} - 1) + 1}\Big)$$

est solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\widehat{r}x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + \widehat{b}x \frac{\partial v}{\partial x}(t,x).$$

2. En déduire $\mathbb{P}(\bar{X}_t = 0)$.

Maintenant, <u>on suppose que $\eta > 0$</u>.

3. Montrer que pour tout $\zeta > 0$, il existe x_0 suffisamment grand de sorte que $\widehat{b}x - \eta x^2 \leq -\zeta x + (\widehat{b} + \zeta)\mathbf{1}_{x \leq x_0}$.

4. On introduit $\tau = \inf\{t \geq 0,\ \bar{X}_t \leq x_0\}$ et $\rho_M = \inf\{t \geq 0,\ \bar{X}_t \geq M\}$ avec $M > x_0$. En utilisant (5), montrer que

$$x_0 \mathbb{E}(\tau \wedge \rho_M) \leq \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau \wedge \rho_M} \bar{X}_s ds \Big) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}_+} m_0(a) da}{\zeta}.$$

5. On suppose pour simplifier que $\int_{\mathbb{R}_+} m_0(a) da = x_0$. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}_{x_0}\big(\exists t \geq 0,\ \bar{X}_t = 0\big) = 1$.

6. Comparer les cas $\eta = 0$ et $\eta > 0$.