Examen - Séries temporelles - M2 ISN (2h)

Vendredi 30 janvier 2015

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

Exercice 1 (Etude d'un ARMA(1,1))
On considère un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1},$$

où $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$, et où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Donner le développement MA(∞) de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

2. Calculer les autocovariances $\gamma(h)$ ($h \in \mathbb{Z}$) du processus à partir des équations précédentes. *Indication : on pourra distinguer $h \in \{-1, 0, 1\}$ des autres valeurs de h.*

3. Etablir à partir de la représentation ARMA(1,1) les équations de Yule-Walker pour $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(h)$, $h > 1$. Retrouver à partir de ces équations, les résultats de **2.** .

4. Montrer que la prévision ${}_t\widehat{X}_{t+k}$ de X_{t+k} connaissant le processus jusqu'au temps t est ${}_t\widehat{X}_{t+k} = \phi^{k-1}\ {}_t\widehat{X}_{t+1}$, avec ${}_t\widehat{X}_{t+1} = \phi X_t - \theta\varepsilon_t$.

5. Montrer que ${}_t\widehat{X}_{t+1} = (\phi - \theta)\sum_{j=0}^{+\infty}\theta^j X_{t-j}$, puis que ${}_t\widehat{X}_{t+1} = (\phi-\theta)X_t + \theta_{t-1}\widehat{X}_t$. Quel est l'intérêt de cette formule ?

6. Considérons maintenant le processus stationnaire

$$Y_t - 3Y_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}.$$

Donner la représentation canonique de ce processus. Dans la suite, on considérera cette représentation canonique, associée à un bruit blanc $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ dont on précisera la variance.

7. En déduire les autocovariances de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et donner un intervalle de confiance pour Y_{t+k} lorsque la série est observée jusqu'au temps t et que les résidus $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont gaussiens.

Exercice 2 (Etude d'un ARIMA(0,1,1))
On considère le processus ARIMA(0,1,1) $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$(1-L)Y_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

où $|\theta| < 1$ et L est l'opérateur retard.

1. Déterminer une représentation AR(∞) du processus.

2. En remarquant que $(1-L)\sum_{i=0}^{t-1} L^i = 1 - L^t$, montrer que

$$Y_t - Y_0 = \varepsilon_t + (1-\theta)\sum_{k=1}^{t-1}\varepsilon_{t-k} - \theta\varepsilon_0.$$

3. Montrer que la prévision ${}_t\widehat{Y}_{t+1} = (1-\theta)Y_t + \theta\ {}_{t-1}\widehat{Y}_t$.