Examen - Séries temporelles - M2 ISN (2h)

Lundi 15 janvier 2018

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr
2 pages (recto-verso)

Exercice 1 (Etude d'un ARIMA-GARCH)
Partie 1 : ARIMA

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc réel, de variance σ^2.

1. Le processus suivant est-il stationnaire ? (justifier)

$$X_t = 4X_{t-1} - 3X_{t-2} + \varepsilon_t.$$

2. On introduit le processus $Y_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA qu'on précisera. Le donner sous sa forme canonique, et calculer la variance du bruit blanc qui apparaît (on le notera $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et on montrera que c'est effectivement un bruit blanc).

3. Quelle est la meilleure prévision (linéaire) de Y_t sachant $\sigma(\underline{Y_{t-1}})$?

4. Donner la représentation du processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ comme moyenne mobile infinie.

5. Quelles sont l'espérance et la variance de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?

6. Calculer la fonction d'autocovariance de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en utilisant les équations de Yule-Walker.

Partie 2 : ARMA-GARCH

1. Dans cette partie, $(\varepsilon_t)_{t\in Z}$ est un processus GARCH(1,1) :

$$\varepsilon_t = u_t\sigma_t,$$

où $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc Gaussien indépendant, de variance $\sigma_u^2 \geq 1$, et où $\left(\sigma_t = \sqrt{\mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait l'équation suivante :

$$\sigma_t^2 = \omega + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}^2 + \frac{1}{4}\sigma_{t-1}^2.$$

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est la filtration naturelle associée au processus $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$: $\mathcal{F}_t = \sigma(\underline{\varepsilon_t})$.

Calculer l'espérance et la variance (non conditionnelles) de ε_t.

2. On considère maintenant le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de la partie 1, mais avec le bruit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui est le GARCH(1,1) de la question précédente. La représentation en moyenne mobile infinie de la question 4 est-elle encore valable ?

3. En déduire la meilleure prévision $Y_t(h)$ de Y_{t+h} conditionnellement aux observations jusqu'à la date t.

4. Montrer que l'erreur de prévision est :

$$e_t(h) = Y_{t+h} - Y_t(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \frac{\varepsilon_{t+h-k}}{3^k}.$$

5. En utilisant un calcul similaire à la question 1 de cette partie, exprimer $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t)$ en fonction de $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h-1}^2 \mid \mathcal{F}_t)$.

6. En déduire la limite de la variance de l'erreur de prévision lorsque $h \to +\infty$.

Exercice 2 (Processus vectoriel)
On considère 3 processus $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(z_t)_{t\in\mathbb{N}}$, et on note pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}.$$

Dans la suite,

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \varepsilon_t^{(2)} \\ \varepsilon_t^{(3)} \end{pmatrix}$$

est un vecteur de bruits blancs indépendants de matrice de variance-covariance σ^2 Id. On suppose que pour $t \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t & = & \frac{1}{3}\big(4x_{t-1} + y_{t-1} + z_{t-1}\big) + \varepsilon_t^{(1)} \\ y_t & = & \frac{1}{3}\big(x_{t-1} + 7y_{t-1} - 2z_{t-1}\big) + \varepsilon_t^{(2)} \\ z_t & = & \frac{1}{3}\big(x_{t-1} - 2y_{t-1} + 7z_{t-1}\big) + \varepsilon_t^{(3)}. \end{array} \right.$$

La condition initiale est $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

1. Ecrire l'équation sur la dynamique de X_t sous la forme

$$\Delta X_t = AX_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où A est une matrice à préciser.

2. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

3. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ peut-il être stationnaire ? (Justifier)

4. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est cointégré. On précisera son rang de cointégration et le(s) vecteur(s) de cointégration.