# Examen - Séries temporelles - M2 ISN (2h)

Mercredi 11/12/13

**Viet Chi Tran**, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`
Ce sujet comporte 3 exercices indépendants et une annexe de sorties SAS.

**Exercice 1 (Processus stationnaire)**
On considère le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$Y_t = 2Y_{t-1} + u_t, \qquad u_t \rightsquigarrow \mathcal{BB}\Big(0, \frac{5}{18}\Big).$$

On suppose que $Y_t$ est entaché d'une erreur d'observation et que l'on observe en fait

$$X_t = Y_t + \eta_t, \qquad \text{où } \eta_t \rightsquigarrow \mathcal{BB}\Big(0, \frac{1}{6}\Big) \text{ non corrélé avec } u_t$$

dans le sens où $\forall t, s \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(\eta_t u_s) = 0$.

**1.** Montrer que le processus $w_t = u_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}$ est stationnaire au second ordre et qu'il a les même auto-covariances que certains processus MA(1) qu'on précisera. Calculer la densité spectrale de $w_t$. En déduire qu'on peut trouver un bruit blanc $\varepsilon_t$ tel que $w_t = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$.

**2.** En déduire que $X_t$ est un ARMA(1,1) que l'on explicitera.

**3.** Donner une représentation canonique de $X_t$.

**4.** Ecrire une équation de récurrence pour les auto-covariances de $X_t$. La résoudre et commenter.

**5.** Donner une représentation de $X_t$ du type

$$X_t = -\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i v_{t-i} + v_t, \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{+\infty} |\pi_i| < +\infty$$

et où $(v_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc pour lequel on précisera ce qui est remarquable. Quelle est l'utilité de cette représentation ?

**Exercice 2 (Processus vectoriel)**
On considère deux processus $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} x_t &= x_{t-1} + u_t \\ y_t &= \frac{5}{6}y_{t-1} - \frac{1}{6}y_{t-2} - x_{t-1} + v_t, \end{cases}$$

où $(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(v_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont des bruits blancs indépendants.

**1.** Vérifier que $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont non stationnaires. Qu'en est-il de $\Delta x_t$ et $\Delta y_t$ ? A quelle famille de processus appartient $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ?

**2.** On pose

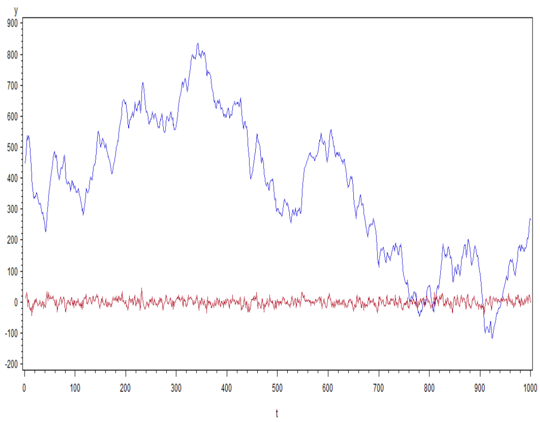
$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}.$$

Ecrire le modèle sous la forme VAR : $A(L)X_t = \varepsilon_t$, en précisant la matrice $A(L)$.

**3.** Calculer $\det(A(L))$ et commenter. Vérifier que l'on peut écrire $A(L) = A(1) + (1-L)A^*(L)$.

**4.** Conclure.

**Exercice 3 (Lecture de sorties SAS)**
On dispose d'une série de donées $(Y_t)$ qui ont été simulées par le code donné en annexe (Etape 1). On suppose qu'on ne dispose que des données et qu'on a perdu le code de l'annexe (Etape 1). On ne connaît donc pas les vrais coefficients du modèle ayant généré $(Y_t)$ et il faut les réestimer. Le graphique, ainsi que celui de $\Delta Y_t$, est représenté dans la figure suivante.




**1.** Au vu du graphique, la série $(Y_t)$ semble-t-elle stationnaire ?

**2.** On réalise un test de Dickey-Fuller augmenté. Rappeler très brièvement l'idée de ce test et commenter les sorties dans l'annexe (Etape 3). Au vu des auto-corrélogramme, peut-on confirmer que $(Y_t)$ est bien un processus intégré ? En regardant les auto-corrélogrammes, quels sont les modèles que nous allons envisager ?

**3.** On procède maintenant à l'estimation du modèle et on réalise les sorties de l'annexe (Etapes 4-7). Quel est le meilleur modèle ? Commenter les valeurs des coefficients associés et leurs significativité.

**4.** Quel est le modèle final retenu pour la série $(Y_t)$ ?