Examen - Séries temporelles - M2 ISN (2h)

Lundi 9 Novembre 2015

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

Exercice 1 (MA(1))
Soient $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs de variance σ^2 et soit $\theta \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Montrer que les séries

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \qquad \text{et} \qquad Y_t = \eta_t + \frac{1}{\theta}\eta_{t-1}$$

ont les mêmes fonctions d'autocorrélation.

Exercice 2 (Etude d'un processus univarié)
On considère un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait

$$X_t = -0.4X_{t-1} + 0.12X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. De quel modèle ARMA s'agit-il ?

2. Le processus est-il stationnaire ? Quelle est son espérance ?

3. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est l'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et que la fonction d'autocovariance $h \mapsto \gamma(h)$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une équation de récurrence à déterminer.

4. Quelle doit être la valeur de σ^2 pour que $\mathrm{Var}(X_t) = 1$?

5. En déduire, pour cette valeur de σ^2, la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$.

6. Quel autre moyen connaissez-vous pour calculer les autocovariances de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?

7. Déterminer l'expression de $\widehat{X}_t^{(1)} = EL(X_t|1,\ X_{t-1})$.

Exercice 3 (Processus vectoriel)
On considère deux processus $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_t & = & x_{t-1} + u_t \\ y_t & = & \frac{5}{6}y_{t-1} - \frac{1}{6}y_{t-2} - x_{t-1} + v_t, \end{array}\right.$$

où $(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(v_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont des bruits blancs indépendants.

1. Vérifier que $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont non stationnaires. Qu'en est-il de Δx_t et Δy_t ? A quelle famille de processus appartient $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$?
2. On pose

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}.$$

Ecrire le modèle sous la forme VAR : $A(L)X_t = \varepsilon_t$, en précisant la matrice $A(L)$.
3. Calculer $\det(A(L))$ et commenter. Vérifier que l'on peut écrire $A(L) = A(1) + (1-L)A^*(L)$.
4. Conclure.