Examen - Séries temporelles - M2 ISN (2h)

Vendredi 2 Décembre 2016

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr
2 pages (recto-verso)

Exercice 1 (Stationnarité)
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc réel, de variance σ^2. Les processus suivants sont-ils stationnaires ? Justifiez.

1. $X_t = \varepsilon_t - 2t\ \varepsilon_{t-1}$.

2. $X_t = \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \varepsilon_t$.

3. $X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1}\sin(ct)$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Etude d'un processus univarié)
On considère un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait

$$X_t = \frac{11}{5}X_{t-1} - \frac{2}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. De quel modèle ARMA s'agit-il ? Le processus est-il stationnaire ? Quelle est son espérance ?

2. Donner la représentation canonique de ce processus, en fonction de son processus d'innovation $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

3. Montrer que la fonction d'autocovariance $h \mapsto \gamma(h)$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une équation de récurrence à déterminer. Donner la forme de la solution (on ne calculera pas les constantes).

4. Donner la représentation MA(∞) de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

5. Quelle doit être la valeur de σ^2 pour que $\mathrm{Var}(X_t) = 1$?

6. Déterminer l'expression de $\widehat{X}_t^{(1)} = EL(X_t|1,\ \underline{X_{t-1}})$.

Exercice 3 (Processus vectoriel)
On considère 3 processus $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(z_t)_{t\in\mathbb{N}}$, et on note pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}.$$

Dans la suite,

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \varepsilon_t^{(2)} \\ \varepsilon_t^{(3)} \end{pmatrix}$$

est un vecteur de bruits blancs indépendants de matrice de variance-covariance σ^2 Id. On suppose que pour $t \geq 1$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_t &=& \frac{1}{3}\big(4x_{t-1} + y_{t-1} + z_{t-1}\big) + \varepsilon_t^{(1)} \\ y_t &=& \frac{1}{3}\big(x_{t-1} + 7y_{t-1} - 2z_{t-1}\big) + \varepsilon_t^{(2)} \\ z_t &=& \frac{1}{3}\big(x_{t-1} - 2y_{t-1} + 7z_{t-1}\big) + \varepsilon_t^{(3)}. \end{array}\right.$$

La condition initiale est $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

1. Ecrire l'équation sur la dynamique de X_t sous la forme

$$\Delta X_t = AX_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où A est une matrice à préciser.

2. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

3. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ peut-il être stationnaire ? (Justifier)

4. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est cointégré. On précisera son rang de cointégration et le(s) vecteur(s) de cointégration.