Approximation en grandes populations et estimation par maximum de vraisemblance

ENSAE

Tran Viet Chi

Université des Sciences et Techniques Lille 1

11 avril 2008

Modèle SIR étudié, sa renormalisation et la LGN

Théorème central limite

Maximum de vraisemblance avec des données complètes

Modèle SIR étudié

$$\boxed{S} \xrightarrow{\lambda SI} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

Fig.: *Modèle SIR d'après Kermack et McKendrick.*

- Chaque personne infectieuse contamine une personne saine donnée au taux λ
- Une personne infectieuse est retirée au bout d'un temps exponentiel de taux γ

Description par une EDS

Soient Q^1 et Q^2 deux mesures ponctuelles de Poisson d'intensité $d\theta \times ds$ où $d\theta$ et ds sont les mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$

$$
\begin{aligned}
S_t =& S_0 - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \lambda I_{s-} S_{s-}} Q^1(ds, d\theta) \\
I_t =& I_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \lambda I_{s-} S_{s-}} Q^1(ds, d\theta) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \gamma I_{s-}} Q^2(ds, d\theta) \\
R_t =& 0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \gamma I_{s-}} Q^2(ds, d\theta)
\end{aligned}
$$

Pour toute condition initiale $(S_0, I_0, 0)$ et tout couple de mesure aléatoire de Poisson Q^1 et Q^2 :
Ceci définit de façon trajectorielle un unique processus aléatoire $(S_t, I_t, R_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^3)$ l'espace des trajectoires continues à droite limitées à gauche.

Renormalisation

On considère une suite de processus $(S^n_t, I^n_t, R^n_t, t \in \mathbb{R}_+)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq :

- S^n_0/n et I^n_0/n convergent en probabilité vers s_0 et $i_0 \in \mathbb{R}_+$ (la taille de la population initiale est d'ordre n)
- chaque individu est de poids $1/n$
- le taux d'infection (non linéaire) est renormalisé en λ/n.

On pose :

$$s^n_t = \frac{S^n_t}{n}, \quad i^n_t = \frac{I^n_t}{n}, \quad r^n_t = \frac{R^n_t}{n}$$

L'équation d'évolution satisfaite par (s^n_t, i^n_t, r^n_t) est :

$$\begin{aligned}
s^n_t =& s^n_0 - \frac{1}{n}\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq (\lambda/n) I^n_{s-} S^n_{s-}} Q^1(ds, d\theta) \\
i^n_t =& i^n_0 + \frac{1}{n}\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \lambda I^n_{s-} S^n_{s-}} Q^1(ds, d\theta) - \frac{1}{n}\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \gamma I^n_{s-}} Q^2(ds, d\theta) \\
r^n_t =& 0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \leq \gamma I^n_{s-}} Q^2(ds, d\theta)
\end{aligned}$$

Décomposition en semi-martingale

Si $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left((s_0^n)^2 + (i_0^n)^2\right) < +\infty$, alors :

$$\begin{aligned}
s_t^n =& s_0^n - \lambda \int_0^t i_s^n s_s^n \, ds - M_t^{1,n} \\
i_t^n =& i_0^n + \lambda \int_0^t i_s^n s_s^n \, ds + M_t^{1,n} - \gamma \int_0^t i_s^n \, ds - M_t^{2,n} \\
r_t^n =& \gamma \int_0^t i_s^n \, ds + M_t^{2,n}
\end{aligned}$$

$M^{1,n}$ et $M^{2,n}$: martingales de carré intégrable et de crochet en $O(1/n)$

Loi des grands nombres : Si $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left((s_0^n)^2 + (i_0^n)^{2+\delta}\right) < +\infty$ alors $(s_t^n, i_t^n, r_t^n,\ t \in \mathbb{R}_+)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^3)$ vers l'unique solution de

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} =& -\lambda\ i_t\, s_t, \qquad \frac{di}{dt} = \lambda i_t\, s_t - \gamma i_t \\
\frac{dr}{dt} =& \gamma i_t, \qquad s(0) = s_0, \quad i(0) = i_0, \quad r(0) = 0.
\end{aligned}$$

Idée de la preuve de la LGN

Plan de la preuve :

- On montre que la suite des lois de probabilité $(\mathcal{L}(s^n, i^n, r^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est relativement compacte
- On peut donc extraire de $(s^n, i^n, r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite qui converge en loi
- On montre l'unicité de la limite en loi en l'identifiant comme unique solution d'une équation d'évolution.

Condition suffisante de relative compacité

Soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de semi-martingales, $X^n = A^n + M^n$ où :

- A^n est un processus à variations finies
- M^n est une martingale de carré intégrable

Si A^n et $\langle M^n\rangle$ satisfont :

T1 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(|A^n_t|\right) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(|\langle M^n\rangle_t|\right) < +\infty$$

A $\forall T > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour toute suite de couples de temps d'arrêt $(\sigma_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\sigma_n \leq \tau_n \leq T$ et $\tau_n \leq \sigma_n + \delta$

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbb{P}\left(|A^n_{\sigma_n} - A^n_{\tau_n}| > \eta\right) < \varepsilon, \qquad \sup_{n\geq n_0} \mathbb{P}\left(|\langle M^n\rangle_{\sigma_n} - \langle M^n\rangle_{\tau_n}| > \eta\right) < \varepsilon$$

Alors la suite $(\mathcal{L}(X^n))$ est relativement séquentiellement étroitement compacte.

Identification de la valeur d'adhérence

On introduit :

$$\Psi(s,i,r,t) = \left|s_t - s_0 + \int_0^t \lambda i_s s_s\, ds\right| + \left|i_t - i_0 - \int_0^t \lambda i_s s_s\, ds + \int_0^t \gamma i_s\, ds\right| + \left|r_t - \int_0^t \gamma i_s\, ds\right|$$

Soit (s^*, i^*, r^*) une valeur d'adhérence de (s^n, i^n, r^n). Elle est continue.

On a alors :
$\Psi(s^{\phi(n)}, i^{\phi(n)}, r^{\phi(n)}, t) = |M_t^{1,n}| + |M_t^{1,n} - M_t^{2,n}| + |M_t^{2,n}| \to \Psi(s^*, i^*, r^*, t)$

Pour vérifier que (s^*, i^*, r^*) satisfait l'EDO, on cherche à montrer que $\mathbb{E}(\Psi(s^*, i^*, r^*, t)) = 0$

On a $\mathbb{E}(\Psi(s^n, i^n, r^n, t)) = O(1/n)$ et par la condition de moment $2+\delta$, $\Psi(s^n, i^n, r^n, t)$ est uniformément intégrable.

Modèle SIR étudié, sa renormalisation et la LGN

Théorème central limite

Maximum de vraisemblance avec des données complètes

Théorème central limite

On pose $\eta_t^{s,n} = \sqrt{n}(s_t^n - s_t)$ et $\eta_t^{i,n} = \sqrt{n}(i_t^n - i_t)$. Sous des conditions de moment suffisantes, $(\eta^{s,n}, \eta^{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ vers le processus gaussien :

$$\begin{aligned} d\eta_t^s &= -\lambda\big(i_t\eta_t^s + s_t\eta_t^i\big)\,dt - \sqrt{\lambda i_t s_t}\,dB_t^1 \\ d\eta_t^i &= \big(\lambda(i_t\eta_t^s + s_t\eta_t^i) - \gamma\eta_t^i\big)\;dt + \sqrt{\lambda i_t s_t}\,dB_t^1 - \sqrt{\gamma i_t}\,dB_t^2 \end{aligned}$$

Rque : on utilisera un théorème qui sera vu tout à l'heure.

Modèle SIR étudié, sa renormalisation et la LGN

Théorème central limite

Maximum de vraisemblance avec des données complètes

Vraisemblance

On note (λ^*, γ^*) les vrais paramètres.

$$\mathcal{L}_T^n = \exp\left(nT + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \ln\left(\lambda s_{t-}^n i_{t-}^n\right) \mathbf{1}_{\theta \leq \frac{\lambda^*}{n} S_{t-}^n I_{t-}^n} Q^1(dt, d\theta) \right.$$
$$\left. + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \ln\left(\gamma i_{t-}^n\right) \mathbf{1}_{\theta \leq \gamma^* I_{t-}^n} Q^2(dt, d\theta) - \int_0^T n\left(\lambda i_t^n s_t^n + \gamma i_t^n\right) ds \right)$$

On obtient la log-vraisemblance :

$$\ell_T^n = \frac{1}{n} \ln \mathcal{L}_T^n = T + \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \ln\left(\lambda s_{t-}^n i_{t-}^n\right) \mathbf{1}_{\theta \leq \frac{\lambda^*}{n} S_{t-}^n I_{t-}^n} Q^1(dt, d\theta)$$
$$+ \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \ln\left(\gamma i_{t-}^n\right) \mathbf{1}_{\theta \leq \gamma^* I_{t-}^n} Q^2(dt, d\theta) - \int_0^T \left(\lambda i_t^n s_t^n + \gamma i_t^n\right) ds$$

Equations de vraisemblance

$$\frac{\partial \ell_T^n}{\partial \lambda} = \frac{1}{n}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}_{\theta \le (\lambda^*/n) S_{t-}^n I_{t-}^n} Q^1(dt, d\theta) - \int_0^T s_t^n i_t^n \, dt$$

$$\frac{\partial \ell_T^n}{\partial \theta} = \frac{1}{n}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\gamma} \mathbf{1}_{\theta \le \gamma I_{t-}^n} Q^2(dt, d\theta) - \int_0^T i_t^n \, dt$$

On en déduit ici :

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_n &= \frac{\frac{1}{n}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \le (\lambda^*/n) S_{t-}^n I_{t-}^n} Q^1(dt, d\theta)}{\int_0^T s_t^n i_t^n dt} \\
&= \lambda^* - \frac{\frac{1}{n}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \le (\lambda^*/n) S_{t-}^n I_{t-}^n} \widetilde{Q}^1(dt, d\theta)}{\int_0^T s_t^n i_t^n dt} \\
\widehat{\gamma}_n &= \frac{\frac{1}{n}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \le \gamma^* I_{t-}^n} Q^2(dt, d\theta)}{\int_0^T i_t^n dt} = \gamma^* + \frac{\frac{1}{n}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta \le \gamma^* I_{t-}^n} \widetilde{Q}^2(dt, d\theta)}{\int_0^T i_t^n dt}
\end{aligned}$$

Normalité asymptotique

Le score est ici :

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \frac{\partial \ell_T^n}{\partial \lambda}(\lambda^*,\gamma^*) \\ \frac{\partial \ell_T^n}{\partial \theta}(\lambda^*,\gamma^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\lambda^*} \mathbf{1}_{\theta \le (\lambda^*/n) S_{t-}^n I_{t-}^n} \widetilde{Q}^1(dt, d\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\gamma^*} \mathbf{1}_{\theta \le \gamma^* I_{t-}^n} \widetilde{Q}^2(dt, d\theta) \end{pmatrix}$$

Il définit une martingale centrée et dont le crochet tend vers le processus

continu croissant déterministe

$$\Sigma(\lambda^*,\gamma^*)_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^*} \int_0^t s_s i_s \, ds & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^*} \int_0^t i_s \, ds \end{pmatrix}$$

La taille des sauts est en $O(1/\sqrt{n})$ et tend vers 0 en probabilité.

Alors, $\sqrt{n}\begin{pmatrix} \frac{\partial \ell_T^n}{\partial \lambda}(\lambda^*,\gamma^*) \\ \frac{\partial \ell_T^n}{\partial \theta}(\lambda^*,\gamma^*) \end{pmatrix}$ converge en loi vers une martingale gaussienne continue de crochet $\Sigma(\lambda^*,\gamma^*)$.

Ceci est la conséquence du résultat suivant :

Th : Soit $(M^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de martingales. Si $\langle M^n\rangle$ converge simplement en probabilité vers un processus continu déterministe croissant m et si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\Delta M_t^n > \varepsilon\right) \to 0, \qquad \text{lorsque } n \to +\infty$$

alors $(M^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une martingale gaussienne continue de crochet m.

On en déduit la normalité asymptotique de $\widehat{\lambda}_n$ et $\widehat{\gamma}_n$:

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{\lambda}_n - \lambda^* \\ \widehat{\gamma}_n - \gamma^* \end{pmatrix} \to \mathcal{N}(0, \Sigma(\lambda^*, \gamma^*)^{-1}) \text{ en loi}$$