

# Fiche 4 - TIAD - M1 IM

## ACP

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

### Exercice 1 (Pour s'échauffer : retour sur l'exo 2 du TD d'AD)

On considère le tableau de données suivant, correspondant à l'observation de  $K = 3$  variables sur  $n = 6$  individus.

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \\ 10 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le centre de gravité du nuage et la matrice de variance-covariance  $V$  des 3 variables.
2. Calculer le tableau  $Y$  centré et réduit obtenu à partir de  $X$ .
3. Calculer l'inertie totale  $I$  du nuage représenté par  $X$ .
4. On considère la partition constituée suivante  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ . Calculer les variances inter  $B$  et intra  $W$  et vérifier qu'elles somment à  $V$ . Vérifier le lien entre  $I$  et  $V$ .
5. Calculer les inerties inter et intra.
6. Faire l'analyse factorielle du nuage. Quels sont les axes principaux d'inertie ?

### Exercice 2 (Concours de parfums)

Trois parfums sont notés par 6 juges. Les notes sont consignées dans le tableau suivant :

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 5 & 9 & 9 \\ 5 & 3 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 5 & 9 & 7 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

On soumet ce tableau à l'ACP, les poids attribués aux juges étant supposés égaux, et la métrique  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  étant la métrique euclidienne classique.

1. Calculer les moyennes et écarts-type des notes attribuées par chacun des juges.
2. Calculer  $Y$  le tableau centré et réduit associé à  $X$ . Quelle est la matrice de corrélation des trois variables ?
3. Calculer l'inertie totale. Quel est le centre de gravité ?
4. On considère l'axe  $\Delta_u = \text{Vect}(1, 1, 1)$ . Quelle est l'inertie projetée sur cet axe ?
5. Quels sont les axes principaux et les inerties associées ?
6. Donner le tableau contenant les inerties projetées  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ ) les taux d'inertie  $\tau_\alpha$  et les taux cumulés. En suivant la règle de Kaiser, quels seraient les axes à retenir ?
7. Calculer le tableau des coefficients  $COR_\alpha$  et  $CTR_\alpha$ .

8. En déduire les coordonnées des 3 variables.
9. Représenter les individus et les variables dans le plan principal.
10. Quel est le carré du coefficient de corrélation multiple entre chaque variable et le plan principal ?
11. On considère un juge supplémentaire dont les notes sont  $(5, 2, 2)$ . Calculer les coordonnées de ce juge, en tant qu'individu supplémentaire. Est-il bien représenté sur le plan principal ?
12. Un parfum supplémentaire est introduit et est projeté sur les axes en tant que variable supplémentaire. Les notes de ce parfum sont  $(6, 8, 6, 6, 5, 5)$ . Quelles sont ses coordonnées sur les axes factoriels ? Est-il bien représenté sur l'axe principal ?
13. Reconstituer la note du juge 4 pour le parfum 3 à partir des 2 premiers axes factoriels. Comparer à la vraie valeur.