# Processus AR - fiche 3

**Viet Chi Tran**, chi.tran@math.univ-lille1.fr

**Exercice 1 (AR(1))**
Considérons l'AR(1) suivant :

$$X_t - \varphi X_{t-1} = \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.
**1.** Si $\varphi = 1$, montrer qu'il n'existe pas de processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant (1) en considérant la variance de $X_t - X_{t-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**2.** Si $|\varphi| > 1$, donner la représentation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ comme moyenne mobile infinie. Quelle est la représentation canonique de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ?

**3.** Si $|\varphi| < 1$, donner la représentation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ comme moyenne mobile infinie.

**4.** Calculer la fonction d'autocovariance $\rho(h)$.

**5.** Donner $\gamma(0)$ la variance de $X_t$ et donner $r(h)$ la fonction d'autocorrélation partielle.

**6.** Quelle est la matrice de variance-covariance de $(X_t,\ X_{t-1}, \ldots, X_{t-h})$ ?

**Exercice 2 (AR(2))**
On considère le processus suivant :

$$X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc $\mathcal{BB}(0, \sigma^2)$.

**1.** Montrer qu'il existe une solution stationnaire sous la forme $\widetilde{X}_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varepsilon_{t-k}$. En déduire que $\varepsilon_t$ est corrélée avec $\widetilde{X}_{t-k},\ k \geq 1$ et n'est donc pas l'innovation du processus $(\widetilde{X}_t)$.

**2.** Donner la représentation canonique de $X_t$.

**3.** Calculer les autocorrélations de $X_t$.

**4.** En utilisant la représentation canonique, calculer la régression de $X_t$ sur $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$ pour $p \geq 2$.