Processus stationnaires - fiche 2

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Stationnaires ?)
Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc. Quels sont les processus stationnaires ?

- $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ avec a, b, $c \in \mathbb{R}$.
- $X_t = \varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$.
- $X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1}\sin(ct)$ avec $c \in \mathbb{R}$.
- $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$.
- $X_t = \sum_{k=0}^{t} \lambda^k(\varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1})$,

où pour ce dernier processus, on discutera en fonction des valeurs de λ.

Exercice 2 (MA(1))
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ où $\varepsilon_t \rightsquigarrow BB(0,\sigma^2)$ et $|\theta| < 1$. Montrer que la régression linéaire de X_{T+1} sur $X_1, \dots X_T$ est :

$$\widehat{X}_{T+1} = \sum_{j=1}^{T} \varphi_j X_{T+1-j}$$

où les $\varphi_1, \dots \varphi_T$ satisfont :

$$\begin{aligned}
&-\theta\varphi_{j-1} + (1+\theta^2)\varphi_j - \theta\varphi_{j+1} = 0, \ \text{pour } 2 \leq j < T-1\\
&(1+\theta^2)\varphi_1 - \theta\varphi_2 = -\theta\\
&(1+\theta^2)\varphi_T - \theta\varphi_{T-1} = 0.
\end{aligned}$$