

Statistique de Base - M1 Ingé Math.

Exercice 1 (Base)

1. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1, p)$. Faire le test $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p = p_1$ avec $p_1 < p_0$.

2. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 connue. Faire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu = \mu_1$ avec $\mu_1 > \mu_0$.

Exercice 2 (Estimation du paramètre d'échelle d'une loi gamma et tests)

Soit X une variable aléatoire de loi gamma avec paramètres de forme $\alpha = 4$ et paramètre d'échelle inconnu $\theta > 0$. On rappelle que la densité d'une loi gamma de paramètre α et θ est :

$$f = (x; \alpha, \theta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

On dispose d'un échantillon i.i.d. de cette distribution, X_1, \dots, X_n .

1. Montrer qu'il s'agit d'un modèle exponentiel. Donner une statistique exhaustive.
2. Donner l'information de Fisher $I(\theta)$.
3. On s'intéresse à l'estimation par maximum de vraisemblance de θ .
 - a) Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ associé à θ .
 - b) Est-ce que $\hat{\theta}$ est un estimateur efficace de θ ?
 - c) Donner la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$.
 - d) En déduire une région critique asymptotique de niveau de signification α pour le test suivant
$$\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta > 1. \end{cases}$$
 - e) Expliciter la fonction puissance du test précédent en utilisant c).
 - f) Tracer le graphique associé à cette fonction puissance.
4. On se propose maintenant de résoudre le test précédent de façon exacte et optimale.
 - a) Dans un premier temps, obtenir *la forme* (et seulement la forme) de la région critique optimale pour le test intermédiaire suivant (ne pas oublier de justifier) :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > 1). \end{cases}$$

b) En déduire la région critique uniformément plus puissante pour le test

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta > 1. \end{cases}$$

(à expliciter complètement pour un niveau de signification α).

c) Exprimer la fonction puissance comme une intégrale.

d) Sans aucun calcul, comment doit se situer graphiquement cette fonction puissance par rapport à la fonction puissance asymptotique obtenue à la question 3.f) ?