

Fiche 2 - Statistique - M1 Ingé Math

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Bernoulli)

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. tel que pour $x \in \{0, 1\}$:

$$\mathbb{P}(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x},$$

avec $\theta \in]0, 1[$.

1. Ecrire le modèle statistique.
2. Montrer que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive complète.
3. Donner l'unique estimateur SBVM de θ .

Exercice 2 (Etude de quelques lois usuelles)

Pour chacune des lois usuelles, écrire le modèle statistique, la vraisemblance et donner une statistique exhaustive. Ces modèles sont-ils exponentiels ?

1. Loi de Poisson de paramètre λ .
2. Loi de Pareto de paramètres $\alpha > 1$ et $\theta > 0$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est :

$$f(x, \alpha, \theta) = \frac{\alpha - 1}{\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x)$$

3. Loi uniforme sur $[0, \theta]$.
4. Loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$ et $\theta > 0$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est :

$$f(x, \alpha, \theta) = \alpha \theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

Exercice 3 (Emprunts)

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'emprunteur } i \text{ rembourse son crédit} \\ 0 & \text{si l'emprunteur } i \text{ est défaillant} \end{cases}$$

On suppose l'existence de variables aléatoires Y_i^* sous-jacentes, indépendantes, normales d'espérance m et de variance σ^2 , qu'on appellera "capacité de remboursement de l'individu i " telles que :

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i^* \geq 0 \\ 0 & \text{si } Y_i^* < 0. \end{cases}$$

1. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Exprimer la loi de Y_i en fonction de Φ .
2. Montrer que le couple (m, σ^2) n'est pas identifiable. Quel paramètre peut-on identifier ? Ce paramètre sera noté p .
3. Montrer que $S(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n Y_i$ est une statistique exhaustive pour p .
4. Montrer que S est complète.
5. Comment peut-on retrouver les deux résultats précédents directement ?