PMA - fiche 8

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Dans toute la fiche, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Martingales simples)
Montrer que les processus suivants sont des martingales :

1. $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ pour $X \in L^1$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de $\mathcal{A}$.

2. $X_n = \sum_{k=0}^n Y_k$ avec $Y_0, \dots, Y_n, \dots$ une suite de v.a. intégrables et adaptées telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

3. $X_n = \sum_{k=0}^n U_k$ où les U_k sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = -1) = 1/2$.

4. $X_n = \exp(\sum_{k=1}^n U_k - n/2)$ où les U_k sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

5. $X_n = Y_{n\wedge T}$ si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et T un temps d'arrêt.

Exercice 2 (Martingale et jeu de hasard)
Un joueur parie 1 euro une première fois, 2 euros pour la seconde partie, et ainsi de suite. Au $k$ème tour, il mise 2^{k-1}. A chaque partie, il gagne ou perd avec probabilité $1/2$, et indépendamment des autres parties. S'il gagne, il empoche 2 fois sa mise, sinon, il la perd.

1. Soit X_n la variable aléatoire qui est égale au gain du joueur après le $n$ième tour. Montrer que (X_n) est une martingale.

2. L'idée est d'arrêter de joueur à un instant favorable pour être sûr de générer des gains. Le joueur arrête de jouer lorsqu'il gagne pour la première fois. Soit N le nombre (aléatoire) de tours auquels le joueur va miser. Quelle est la loi de N ?

3. Quel est le gain, ou quelle est la perte, du joueur lorsqu'il arrête de jouer en fonction de N ? Commentez ?

4. Quelle est l'espérance de la somme que le joueur aura à dépenser ?

Exercice 3 (décomposition de Doob)
1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale. Montrer qu'il existe une unique décomposition $X_n = A_n + M_n$ pour $n \geq 1$ telle que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit un processus $(\mathcal{F}_{n-1})$-adapté et tele que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une martingale.

2. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \in L^2$, montrer que $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Par la question **1.** , on a alors une décomposition $X_n^2 = A_n + M_n$, et A_n s'appelle le compensateur de la martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Si $X_n = \sum_{k=1}^n g(Y_n)$ où g est une fonction réelle intégrable et où les $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont i.i.d., alors montrer que $M_n = X_n - n\mathbb{E}(g(Y_1))$ est une martingale de compensateur

$$A_n = n\Big(\mathbb{E}\big(g^2(Y_1)\big) - \mathbb{E}\big(g(Y_1)\big)^2\Big).$$

Exercice 4 (Inégalité de Hoeffding et application au voyageur de commerce stochastique)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n - X_{n-1}| \le u_n$ p.s.

1. Montrer que pour $\theta > 0$, et $x > 0$,

$$\mathbb{P}\big(X_n - X_0 \ge x\big) \le e^{-\theta x}\mathbb{E}\big(\exp(\theta(X_n - X_0))\big).$$

2. Montrer que pour $\lambda > 0$ et pour $x \in]0,1[$

$$e^{\lambda x} \le \frac{1-x}{2}e^{-\lambda} + \frac{1+x}{2}e^{\lambda}.$$

En déduire que pour une sous-tribu $\mathcal{F}$ et pour une variable X telle que $\mathbb{P}(0 < |X| < 1) = 1$ et $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = 0$, on a $\mathbb{E}(e^{\lambda X} \mid \mathcal{F}) \le e^{\lambda^2/2}$.

3. En considérant $(X_n - X_{n-1})/u_n$, en déduire que

$$\mathbb{E}\big(\exp(\theta(X_n - X_0))\big) \le \exp\big(\frac{\theta^2}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2\big).$$

4. Conclure que

$$\mathbb{P}\big(|X_n - X_0| \ge x\big) \le 2\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sum_{k=1}^{n} u_k^2}\Big).$$

Considérons n points $P_k = (X_k, Y_k)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$, répartis uniformément et indépendamment dans $[0,1]^2$. Pour une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on associe la longueur du parcours correspondant :

$$d(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} |P_{\sigma(k+1)} - P_{\sigma(k)}| + |P_{\sigma(n)} - P_{\sigma(1)}|,$$

où $|.|$ est la distance euclidienne. La distance minimale parcourue est $D_n = \inf_\sigma d(\sigma)$.

1. Soit $\mathcal{F}_k = \sigma(P_1, \dots P_k)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. On pose $Z_k = \mathbb{E}(D_n \mid \mathcal{F}_k)$. Montrer que $(Z_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est une martingale.

2. Soit D_n^k la longueur du chemin minimum reliant tous les points excepté le $k$ème. Expliquer pourquoi

$$D_n^k \le D_n \le D_n^k + 2L_k$$

où L_k est la plus courte distance de P_k à l'un des points $P_{k+1}, \dots P_n$. Donner des encadrements pour Z_{k-1} et Z_k.

3. En déduire que

$$|Z_k - Z_{k-1}| \le 2\max\{\mathbb{E}(L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}),\ \mathbb{E}(L_k \mid \mathcal{F}_k)\} \le 2\sqrt{2},$$

puis que

$$\mathbb{P}\big(|D_n - \mathbb{E}(D_n)| \ge x\big) \le 2\exp\big(-x^2/(2\sqrt{2}n)\big).$$